DELLA
PROSPETTIVA
E SUA APPLICAZIONE
ALLE SCENE TEATRALI

CON APPENDICI

RISGUARDANTI LA COSTRUZIONE
DI ALCUNI NUOVI STRUMENTI DA DISEGNO
E DI VARIE FIGURE GEOMETRICHE

DI

FRANCESCO TACCANI

MILANO 1825

PER PAOLO EMILIO GIUSTI

FONDITORE-TIPOGRAFO

PREFAZIONE

A comporre ed a pubblicare un' opera versante sopra materia trattata in via teorica e pratica da non pochi Autori, adduco la ragione che precipuamente m' indusse, ed è, che io credei staccarmi alquanto da essi che mi precedettero, nello stabilire alcuni principj ed alcune massime preliminari, tuttora deficienti alla più estesa conoscenza dell'arte in questo libro sviluppata. Ed in effetto, se mal non m'appongo, sembrami che a maggiore schiarimento della prospettiva, manchi una chiara ed esatta spiegazione di tutti li dati primordiali, derivanti dall' indole e dallo scopo di essa, i quali essendo indispensabili a qualsiasi costruzione prospettica, costituiscono perciò gli elementi delle di lei operazioni.

Nè di lieve momento io reputo l' accennata mancanza, poichè da essa deriva la non sufficiente chiarezza, ed il non distinto ordinamento di idee che manifestasi nelle menti de' principianti non solo, ma ben anco in quelle de' più provetti nell' arte, ond' è che non di rado confondonsi insieme le cose più disparate, e ne provengono le

contraddizioni che taluno opinasi di scorgere nell' arte stessa, e conseguentemente le controversie che ne emergono, ed in fine le apparenti difficoltà che positivamente non esistono in essa prospettiva, le quali sgomentano ed allontanano gli artisti dall' apprenderla in tutta la sua estensione, con grave obice al perfezionamento delle opere loro.

Sembrami inoltre che nei metodi dimostrativi, alcuni autori non abbiano avuto di mira l' istruzione degli artisti, avvegnachè per lo sviluppo delle teorie prospettiche, esigono essi delle cognizioni matematiche, astratte, o di soverchio elevate, le quali difficilmente combinansi cogli studj elementari e semplici percorsi da coloro che hanno bisogno d' applicarsi alla prospettiva, e quindi riescono a questi inintelligibili. Altri autori poi, non attenendosi nelle opere loro che a mera pratica, pare non s'avvisassero che gli artisti hanno pure bisogno di conoscere le teorie da cui le operazioni derivano, sia per togliere loro l' incertezza dell' operare, sia per iscorgerne e seguirne la via più spedita in ogni circostanza, la quale via conduce ad un tempo alla maggior facilità non meno, che alla necessaria precisione del lavoro.

Inoltre egli è noto che la prospettiva può esprimersi non solo su di una superficie continua, ma pur anco su di un sistema di piani disgiunti, i quali costituiscono la rappresentazione di un oggetto solo. Questo ramo dell' arte prospettica

che è di speciale attribuzione de' Pittori di scene, fu generalmente non curato ne' trattati di prospettiva, e se taluno pure ne fece alcun cenno, fu tale appunto da non poterne il Pittore dedurre alcun metodo, applicabile a guida sicura per dipingere le scene da teatro; quindi ne venne l'incertezza e l'arbitrio dell'operare nella disposizione de' varj piani cui si diedero li nomi di quinte, *di* rompimenti, *e di* teloni, *di maniera che le varie parti di un unico oggetto su di essi ripartito, presentinsi allo spettatore come se il dipinto fosse tutto eseguito su di un sol piano, e ne emerse pure la generale opinione, che impossibile sia ne' teatri l'ottenere una esatta corrispondenza tra l'altezza invariabile degli attori e quella della prospettiva scenica, e per ultimo non esservi, sotto di un tale rapporto, una regola plausibile pel conseguimento di una prospettiva perfetta.*

Tali sono le cose che io spero di avere dilucidato con sufficiente chiarezza in quest' opera, la quale ho divisa in tre sezioni. La prima contiene le definizioni necessarie a togliere ogni equivoco negli elementi delle operazioni prospettiche, ed a dilucidarne le teorie; indi l'esposizione delle teorie stesse, nello sviluppo delle quali mi proposi di condurre gli artisti studiosi per la via immaginativa, la quale essendo certamente più consentanea al carattere della prospettiva, e supponendo gli artisti esperti in essa, io sono d' avviso che riescirà a loro intelligibile, cui specialmente è dedicata l' opera. Non debbo tacere per

altro, che in certi casi mi riescì impossibile il prescindere dal sussidio delle linee proporzionali; ma essendo queste facili a concepirsi da chi sia appena versato ne' primi elementi della geometria, tengo per fermo che ciò non risulterà superiore alle forze dell'artista. Ho posto in detta prima sezione gli esempj pratici dalla teoria disgiunti, allo scopo di non confondere le dimostrazioni grafiche, e nell' ipotesi che il giovane, avendo in memoria gli enunciati premessi nella teoria, abbia da comprenderne le applicazioni senza ulteriori schiarimenti; in caso diverso però potrà ripercorrerli, stantechè sono richiamati all' uopo col numero de' corrispondenti paragrafi, e dilucidati da qualche osservazione ove lo credei conveniente. Chiusi finalmente la sezione in discorso, col porre sott' occhio le cautele praticabili pella collocazione più congrua del punto di vista e della parete.

Nella seconda sezione trattasi della prospettiva a più pareti, fermando particolarmente l'attenzione al caso del teatro, e dopo di aver dimostrato l' inesattezza ed i difetti di alcuni metodi in uso presso i pittori di tal genere, io ne vado esponendo altri dedotti rigorosamente dalla natura dell'arte, studiandomi, per quanto fosse possibile, di uniformarmi alle pratiche de' teatri, non perdendo di vista la speditezza che generalmente in tali opere si esige.

La sezione terza espone alcune regole ch' io nomino abbreviatici, *la costruzione grafica delle*

quali non dipendendo dalle delineazioni icnografiche ed ortografiche, potranno perciò riescire di vantaggio a coloro che, pratici di quelle esposte nelle Sez. I, abbisognano di speditezza maggiore nell'operare. A compimento della prospettiva poi, aggiunsi a questa sezione una traccia sul modo di operare ne' casi che la prospettiva medesima si avesse da eseguire su delle superficie inclinate o variamente curve.

Ho chiuso l' opera coll' inserirvi tre appendici, la prima sulla costruzione ed uso di alcuni nuovi strumenti pel disegno, di mia invenzione, i quali per la semplicità e per l'utile loro, riesciranno, spero, gradevoli a qualsiasi disegnatore di prospettive e d' architetture. La seconda sul modo di costruire con metodo uniforme e semplice le curve coniche e la figura ovale. La terza sul compartire con regolarità i cassettoni ad ornamento delle volte semisferiche e semiellittiche, tanto nelle ortografie ed icnografie loro, quanto nella pratica delle volte stesse.

Riassumendo ciò che finora esposi, si vede adunque che l'intenzione mia nel comporre quest'opera, fu quella di rischiarare agli artisti l' essenza della prospettiva, porgendo loro per vie generali, un mezzo di apprenderla più piano e spedito, di quello che richiedesi ove ad essi non si sviluppano che i casi particolari; di fare alcun passo avanzare la prospettiva medesima lineare verso la perfezione, quando vogliasi applicare a più piani; e finalmente di porgere ai disegnatori

di prospettive e d'architetture delle facilitazioni, mediante le quali meno incomode e più esatte riescano loro le operazioni grafiche. Non saprei accertarmi se nel complesso l'opera corrisponderà pienamente allo scopo propostomi, ciò non pertanto se debbo emmettere un giudizio sulla di lei utilità, dedotto dal vantaggio che io stesso ne ritraggo nell'esercizio dell'operare in quella parte che mi risguarda, ho fiducia che dessa risulterà non inutile agli artisti ed all'arte.

SEZIONE I.

CAPO I.

DICHIARAZIONI PRELIMINARI

1. Chiamasi prospettiva quella scienza e insiem bell' arte, che insegna il modo di disporre sopra una, o più superficie scalarmente disposte, un combinato sistema di tinte e di linee, dal quale ne venga all' occhio di chi l' osserva, una sensazione pari a quella che verrebbe prodotta sull' occhio medesimo da un determinato oggetto qualunque.

2. Onde concepire come sia possibile di giungere a produrre una simile illusione, bisogna prima conoscere il modo col quale si effettua in noi la visione. Egli è principio generalmente ricevuto, che da ogni punto di un oggetto visibile partono infiniti raggi rettilinei di luce, i quali si spandono in tutte le direzioni per lo spazio. Di questi raggi, solo quelli che cadono sulla superficie trasparente dell' occhio (*cornea lucida*), servono alla visione del punto osservato. Per la particolare organizzazione dell' occhio, i raggi cadenti sopra la cornea lucida l' attraversano, formando in questo modo due coni opposti, la di cui base è comune sopra la cornea lucida. Il primo di questi coni, l' esterno, ha per vertice il punto osservato, ed il

secondo, l' interno, un punto della superficie del fondo dell' occhio (*la retina*), ed è questo punto, vertice del secondo cono, che ci dà l' idea del punto che si osserva.

3. Ritenendo adunque che gli assi di questi due coni sieno in linea retta, si può supporre che la visione sia in noi prodotta dall'asse del cono visuale esterno prolungato sino alla retina, poichè l' incontro di quello con questa determina il luogo dove si produce la sensazione, mentre gli altri raggi ivi concorrenti, ad altro non servono che a renderla più forte.

4. La cornea lucida è una parte di superficie sferica, e gli assi dei coni visuali incontrandola perpendicolarmente, saranno perciò obbligati a concorrere nel di lei centro, d'onde accade che quando si osserva un oggetto, gli assi dei coni predetti costituiscono due piramidi (*a*) che hanno per vertice il centro della cornea lucida, e per base, l'una l' oggetto e l' altra una porzione della retina, e che l' immagine determinata da quest' ultima piramide è quella che in noi produce la visione dell' oggetto medesimo. Dal detto emerge, che tutti i corpi anche di forma diversa, che produrranno la stessa immagine sulla retina, saranno da noi giudicati eguali.

5. Da quest' ultima considerazione ha luogo l' artifizio della prospettiva. Supponiamo infatti che fra un dato oggetto e l' occhio vi sia una superficie, la quale senza veruna alterazione lasci passare i raggi che dal primo pervengono al se-

condo, cioè permetta che i raggi giungano all'occhio colla forza e col colorito che avrebbero senza attraversare il detto mezzo. Suppongasi pure che i raggi nel passare la superficie lascino solidamente impresso sulla stessa il proprio colore, modificato a seconda della lontananza che ha l' oggetto dalla superficie e dell' ombra che la luce produce sull'oggetto medesimo. Sia tolto ora l'oggetto e rimanga l'occhio nella sua posizione, egli è evidente che i raggi provenienti dai varj punti della figura che immaginammo rimasta impressa sulla superficie, perveranno all' occhio percorrendo la stessa via che tenevano partendo dai punti corrispondenti dell' oggetto, in maniera che la piramide avente base sulla retina si manterrà identica di forma e di colorito, e così identica la sensazione. Lo stesso accaderebbe se la superficie secante fosse posteriore all' oggetto, e segasse la piramide visuale esterna prolungata oltre il corpo veduto. La rappresentazione della supposta immagine per mezzo di solido colorito, è ciò che nominasi prospettiva dell' oggetto.

6. Onde conoscere come si possa giungere a determinare la prospettiva di un oggetto qualunque, è d' uopo analizzare la costituzione dell' oggetto medesimo. E primieramente egli è evidente che qualunque siasi la figura di un oggetto, la luce da esso proveniente non potrà pervenire all' occhio dello spettatore, se non da quella parte dalla quale sia possibile condurre una retta dall' occhio alla di lui superficie. V' ha dunque un ter-

mine che divide l'oggetto in due parti, l'una veduta l'altra nascosta all' osservatore. Questo termine è ciò che si nomina *contorno apparente*.

7. Il contorno apparente varierà se restando fisso l'oggetto l'occhio si muova, e viceversa. Per esempio, guarda un cubo in direzione perpendicolare ad una delle sue facce, il contorno apparente sarà composto dei quattro lati della faccia osservata, e se invece collocherai l'occhio nella direzione della diagonale del cubo vedrai tre facce, ed il contorno apparente sarà composto di sei lati del solido.

8. Il contorno apparente è sempre un contorno lineare; imperocchè ogni corpo è limitato o da facce piane, oppure da una superficie continua, o da un sistema di facce curve, o finalmente di facce piane e curve insieme combinate: e sarà facile il concepire, che nel primo caso il sopradetto contorno sarà in generale un poligono composto di un certo numero di lati del solido; nel secondo una linea curva continua, costituita dalla serie non interrotta de' punti toccati da una retta, che fissa nell' occhio si muova sempre restando appoggiata alla superficie del corpo suddetto; nel terzo, generalmente parlando, sarà un composto di lati curvilinei del solido e di *linee di contatto* generate alla maniera del contorno apparente spettante al secondo caso; e finalmente nel quarto, un insieme di lati rettilinei, di lati curvilinei e di linee di contatto. Ora egli è chiaro che se la retta che immaginammo fissa con un

estremo nell' occhio giri coll' altro lambendo il contorno apparente, essa genererà una superficie piramidale propriamente detta, o conica o mista, e nello stesso tempo descriverà sulla superficie che supponemmo interposta tra l'oggetto e l'occhio un contorno lineare, che sarà prospettiva del contorno apparente, e che stabilirà i limiti della rappresentazione prospettica di tutte le altre parti dell' oggetto medesimo.

9. Oltre il contorno apparente esistono altre cose in un oggetto che possono ritenersi per lineari, cioè i spigoli, le intersecazioni di superficie, i contorni di parti visibili di superficie, i termini delle ombre proprie e dei sbattimenti, gli accidenti di luce, quali sarebbero a cagion d' esempio quei fasci di raggi solari, che particolarmente nei luoghi chiusi e poco illuminati si manifestano nell' entrare la luce per un dato foro, e finalmente le linee in cui le tinte tutto ad un tratto cambiano di colore.

10. Il contorno apparente adunque e l' altro sistema lineare dell'oggetto apparenti all' occhio, rappresentati sopra la superficie, daranno una rete di linee la quale chiamasi prospettiva lineare dell'oggetto, o prospettiva propriamente detta. Questa parte della prospettiva può essere assoggettata a metodi geometrici, e forma il soggetto speciale del presente trattato. L'arte poi di disporre nelle varie parti della rete delle tinte che producano sopra l'occhio dell'osservatore una sensazione pari a quella che gli perverrebbe dalle parti corrispondenti

dell'oggetto, chiamasi prospettiva aerea. Quest'opera del pennello non può che debolmente essere regolata dai metodi geometrici, ed assai più dei precetti vale ad apprenderla uno studio assiduo della natura.

11. La superficie secante la piramide visuale può essere piana o curva: al primo caso fermeremo particolarmente la nostra attenzione nel corso di questo trattato.

12. Se gli oggetti da rappresentarsi prospetticamante si avessero in rilievo, facilmente si potrebbe ridurre ogni determinazione di prospettiva ad una spedita operazione meccanica (*b*); ma ordinariamente in luogo degli oggetti si hanno due projezioni di essi, l'una cioè su di un piano orizzontale e l'altra su di un piano verticale (*c*), e quantunque anche in questo caso si potesse meccanicamente determinarne la prospettiva, l'operazione riescirebbe per altro estremamente lunga e nojosa, perciò giova far uso di metodi grafici (*d*) scientificamente ritrovati, potendo questi, quando non si abbia l'oggetto in rilievo, riescire d'assai più brevi de' meccanici: ma per usare di questi metodi, oltre alle cose la cui esistenza o pur supposizione è essenziale acciò possa una prospettiva esser determinata con qual si voglia mezzo meccanico o pur teorico, (come sono l'oggetto, la superficie secante, il luogo in cui deve essere collocato l'occhio, e gli assi dei coni visuali), altre se ne richiedono di sussidio al disegnatore. Il complesso di queste cose, consistenti in dati supposizioni e derivazio-

ni, costituisce ciò che nomino *elementi delle operazioni prospettiche*.

Elementi delle operazioni prospettiche.

13. *Obbiettivo* dicesi quell' oggetto qualunque che si deve disegnare prospetticamente.

A B C D (Fig. I) rappresenta un obbiettivo.

14. *Punto di vista o visuale* dicesi il luogo ove dev' essere collocato l'occhio di chi osserva la prospettiva, onde egli ottenga una illusione completa, che è quanto dire il vertice della piramide visuale che poggia sopra l' obbiettivo.

Il luogo *E*, mostra il punto di vista della prospettiva *a b c d* dell' obbiettivo *A B C D*.

15. *Parete* o *superficie secante* nominasi il piano sul quale si vuole eseguire la prospettiva. Si suppone questo piano in situazione verticale.

Una parete viene indicata dal piano *h g l i*.

16. *Raggio visuale* dicesi ogni retta che parta dal punto di vista, passi per un punto dell'obbiettivo, e incontri la parete. I raggi visuali rappresentano le direzioni degli assi de' coni visuali antecedentemente nominati: le loro intersezioni colla parete determinano adunque le prospettive dei punti d'onde partono, bene inteso, che se la parete fosse al di là dell'obbiettivo, sarebbe necessario per ottenere dette prospettive, di prolungare i raggi visuali oltre i punti obbiettivi ai quali spettano.

Rappresentando *A B C D* un obbiettivo ed *E* il punto di vista, le rette *A E*, *B E*, *C E*, *D E*, in-

dicheranno i raggi visuali pertinenti ai punti *A*, *B*, *C*, *D* dell'obbiettivo.

17. *Piano geometrico* è un piano orizzontale destinato a ricevere le projezioni dell'obbiettivo del punto di vista e della parete, come pure quelle di altri elementi. La di lui distanza verticale dal punto di vista oppure dall'obbiettivo (dipendendo sempre l'una dall'altra), può essere stabilita secondo più conviene al prospettico. Le projezioni nominate di sopra, supposte in esso esistenti, stabiliscono in un sol piano le rispettive distanze orizzontali, dell'obbietivo del punto di vista e della parete.

Il piano *Y X Z V* è quello che si ritiene rappresentare il piano geometrico.

18. *Piano ortografico* è quello il quale contiene una projezione dell' obbiettivo, effettuata su di esso per una sua posizione verticale. Ritenuta simile posizione, se si farà sul piano ortografico predetto la projezione del piano geometrico, considerato a quella distanza dall'obbiettivo che gli verrà assegnata dall' operatore, si avranno da queste due projezioni quelle distanze verticali dei punti obbiettivi dal piano geometrico, che saranno necessarie nelle operazioni prospettiche.

Il piano *K L N M* indica il piano ortografico spettante all'obbiettivo *A B C D*, in quella situazione verticale in cui lo si suppose effettuando la projezione $A'' \; B'' \; C'' \; D''$ dell' obbiettivo.

19. *Raggio principale* è quella retta che misura la distanza del punto di vista dalla parete,

cioè a dire una retta che dal punto di vista è condotta perpendicolare alla parete.

Rappresendando E il punto di vista, la retta $E\,e$ che si suppone perpendicolare alla parete, indicherà il raggio principale della prospettiva $a\,b\,c\,d$.

20. *Linea di stazione* dicesi quella retta che determina la distanza del punto di vista dal piano geometrico, cioè a dire la verticale compresa tra il punto di vista ed il piano geometrico.

La verticale $E\,e'$ calata dal punto di vista E fino al piano geometrico $Y\,X\,Z\,V$, rappresenta la linea di stazione della prospettiva $a\,b\,c\,d$.

21. *Raggio di concorso* dicesi una retta che parte dal punto di vista, procede parallelamente ad una data obbiettiva, e termina alla parete.

Nella figura II la retta $E\,d$ che si suppone parallela all' obbiettiva $A\,C$, rappresenta il raggio di concorso di detta obbiettiva.

22. *Punto di concorso* è l' incontro del raggio di concorso colla parete.

Il punto d che si ritiene rappresentare quello in cui il raggio di concorso $E\,d$ incontra la parete $h\,g\,i\,l$, indica il punto di concorso dell' obbiettiva $A\,C$.

23. *Linea di concorso* dico la serie non interrotta dei punti di concorso delle varie posizioni di una retta obbiettiva che si muove nello spazio con una data legge.

Onde più facilmente si concepisca cosa sia linea di concorso, prenderò a considerare due casi

de' più semplici, i quali inoltre serviranno a far conoscere due linee di concorso, che sono, come vedremo, di uso frequente nella prospettiva, cioè quelle dette l'una *orizzontale* e l'altra *direttrice.*

Immaginiamo in primo luogo una linea FG (Fig. I) che impernata in una delle sue estremità giri in un piano descrivendo coll' altra un circolo orizzontale, il raggio di concorso per mantenersi parallelo all' obbiettiva seguirà un tal moto ruotando sul punto di vista, e la serie non interrotta dei punti di concorso delle varie posizioni della FG, costituirà una retta orizzontale mn indefinita da ambe le parti, che è una di quelle che io nomino linee di concorso.

Questa linea mn di concorso, che risulta evidentemente distante dal piano geometrico quanto il punto di vista è distante dallo stesso, viene distinta dai prospettici col nome particolare di *orizzontale* o *linea principale.*

In secondo luogo supponiamo che la FG, movendosi pure in un piano, descriva un circolo verticale e perpendicolare alla parete, i punti di concorso delle successive posizioni della linea obbiettiva ruotante, saranno tutti in una retta verticale qq' che passa per la projezione del punto di vista sulla parete. Questa è la seconda delle linee di concorso sopra accennate, cioè la *direttrice.*

24. *Punto d' incontro* dico l' intersezione di una retta obbiettiva, prolungata se occorre, colla parete.

Prolungata la retta AC (Fig. II) indefini-

tamente, sia f il luogo dove succede l'intersezione di detta linea colla parete, sarà f il punto d' incontro della $A\ C$.

25. *Linea d' incontro* denomino l'intersezione di una superficie obbiettiva prolungata, s' è d'uopo, colla parete.

Rappresenti $I\,L\,M\,N$ un piano rettangolare verticale che poggi sul piano geometrico col lato $N\,M$, e siano indicati in $l\,m$ i luoghi dove i prolungamenti de' suoi lati orizzontali $I\,L$, $M\,N$ incontrano la parete, mostrerà $l\,m$ la linea d' incontro della superficie $I\,L\,M\,N$.

26. *Direzione prospettica* dico una retta indefinita nella quale esista la prospettiva di una data linea retta.

Supposto nella indefinita $d\,f$ la prospettiva della $C\,A$, sarà essa $d\,f$ la direzione prospettica della $C\,A$ ora detta.

27. *Punto principale* dicesi la projezione del punto di vista sulla parete, che è quanto dire il luogo in cui il raggio principale incontra la parete.

Nella Fig. I. rappresentando $E\,e$ il raggio principale, e indica il punto principale.

28. *Punto di stazione* vien detta la projezione del punto di vista sul piano geometrico, o pure, ciò che torna lo stesso, il luogo d'incontro della linea di stazione con esso piano geometrico.

Essendosi ritenuta $E\,e'$ per linea di stazione, rappresenta e' il punto di stazione.

29. *Linea del taglio* dicesi la projezione della parete sul piano geometrico.

Nella retta $i\,l$ cadrà la detta projezione.

30. *Linea fondamentale prospettica* nominasi la projezione del piano geometrico sulla parete.

Anche questa projezione si confonde colla il.

Benchè quando la parete ha la sua vera posizione rispetto al piano geometrico, la linea del taglio e la fondamentale si confondono colla comune sezione dei due piani sopradetti, per altro supponendo questi due piani divisi l' uno dall' altro, come si fa nelle operazioni grafiche prospettiche, e supponendo pure segnata in ciascuno di essi una linea che mostri il luogo dove dovrebbero intersecarsi quando loro si dasse la posizione assegnata nel definirli, queste due linee costituiranno due materiali rappresentazioni della li, delle quali, quella sul piano geometrico si dice *linea del taglio* e l' altra *fondamentale prospettica.*

31. *Linea fondamentale ortografica* è la projezione del piano geometrico sul piano ortografico. Si ha conducendo sul piano ortografico una linea che risulti e orizzontale e distante dalla ortografia di un punto dell' obbiettivo, quanto lo è il piano geometrico da esso punto, quando si supponga il piano ortografico predetto nella posizione verticale che gli fu data nel definirlo.

Rappresentando $KLMN$ il piano ortografico nella situazione in cui si effettuò su di esso la projezione dell' obbiettivo $ABCD$, sarà $V'Y'$, supposta orizzontale e distante dal punto C'' quanto lo è C dal piano geometrico, la fondamentale ortografica.

32. *Icnografia* si è la projezione dell'obbiettivo sul piano geometrico.

$B' A'$, che s'intende essere la projezione dell'obbiettivo $A\,B\,C\,D$ sul piano geometrico, sarà la icnografia di detto obbiettivo.

33. *Ortografia* vien detta la projezione dell' obbiettivo sul piano ortografico.

Essendo $K\,L\,M\,N$ il piano ortografico, $A''B''C'D''$ la projezione dell'obbjettivo $A\,B\,C\,D$, sarà $A''\,B''\,C''\,D''$ un' ortografia.

34. *Orizzontale ortografica* si è la projezione dell' orizzontale sul piano ortografico.

Essendo $K\,L\,M\,N$ il piano ortografico, la retta $m'\,n'$ che si suppone distante da $V'\,Y'$ quanto $m\,n$ lo è dalla linea del taglio $i\,l$, sarà la orizzontale ortografica.

35. *Linea della distanza* è la projezione del raggio principale sul piano geometrico; cioè una retta che dal punto di stazione si guida perpendicolarmente alla linea del taglio.

Rappresentando e' il punto di stazione ed $i\,l$ la linea del taglio, la $e'\,q'$ che s' intende perpendicolare alla $i\,l$ sarà la linea della distanza.

36. *Linea dell' altezza* è la projezione della linea di stazione sulla parete, cioè la porzione di direttrice compresa fra il punto principale e la linea fondamentale.

Indicando e il punto principale, $l\,i$ la fondamentale e $q\,q'$ la direttrice, rappresenterà $e\,q$ la linea dell' altezza.

37. *Linee visuali* sono le projezioni dei raggi visuali sul piano geometrico; cioè rette che partono da que' punti dell' icnografia dell' obbiettivo

che spettano ai punti obbiettivi dai quali provengono i raggi rappresentati dalle linee visuali suddette.

Mostrando *B'*, *A'* la icnografia dei punti obbiettivi *B*, *A* ed *e'* il punto di stazione, le rette *e' A'*, *e' B'* indicheranno le linee visuali rappresentanti le projezioni dei raggi visuali *E A*, *E B*.

38. *Rette di concorso* sono le projezioni dei raggi di concorso sul piano geometrico. Si ha ognuna di queste projezioni, in una retta che dal punto di stazione procede parallelamente alla icnografia di una linea obbiettiva, e termina alla linea del taglio.

Rappresentando *e'* (Fig. II) il punto di stazione, *A' C'* la icnografia dell' obbiettiva *A C*, la *e' d'* che s' intende parallela alla *A' C'*, indicherà la retta di concorso che è projezione del raggio di concorso di detta obbiettiva.

39. E per ultimo *Normali* chiamo quelle linee indefinite segnate sulla parete, che s'innalzano verticalmente sulle projezioni dei punti prospettici di concorso e d' incontro, le prime delle quali projezioni esistono evidentemente nella intersecazione delle linee visuali con quella del taglio, le seconde nella unione delle rette di concorso colla stessa linea del taglio, e le terze nel segamento dell'icnografia di una linea obbiettiva, prolungata se occorre, colla medesima linea del taglio.

Rappresentando *b'*, *a'* (Fig. I) le projezioni dei punti prospettici *b*, *a*, saranno le verticali indefinite *b b'*, *a a'* le normali corrispondenti. E così dicasi se ciascuno di questi punti fosse la projezione di un punto di concorso o d' incontro.

CAPO II.

TEORIE PROSPETTICHE.

40. Riducendosi la prospettiva lineare, come abbiam detto, alla determinazione di quelle parti di un oggetto che possono stabilirsi per mezzo di linee, egli è evidente che conoscendosi il modo di determinare la prospettiva di qualsiasi retta o curva, si saprà ottenere quella di un corpo qualunque; anzi si potrebbe ridurre ogni cosa alla determinazione della prospettiva di un punto, poichè due di questi basterebbero per avere le linee prospettiche rette, ed una serie di essi darebbe con una precisione più che sufficiente le linee prospettiche curve: ma questa semplicità nelle teorie sarebbe tutt' altro che di vantaggio alla pratica, per la quale le investigazioni teoriche intorno alle prospettive delle linee, sono fonte di non pochi accorciamenti delle grafiche di lei operazioni, non che di utili precetti intorno alla più opportuna collocazione del punto di vista.

Teorie prospettiche delle linee rette.

41. *La prospettiva di una retta obbiettiva, il di cui prolungamento passa pel punto di vista, è un punto.*

Imperciocchè i raggi visuali spettanti ai punti dell' obbiettiva, avranno una direzione identica a quella di essa, e quindi segheranno tutti la pa-

rete in un medesimo punto, che sarà prospettiva di detta retta.

42. *La prospettiva di una retta, il di cui prolungamento non passa pel punto di vista, è una retta.*

È evidente che la serie non interrotta dei raggi visuali pertinenti a detta linea costituisce un piano, il quale segato dalla parete, piana essa pure, produrrà una linea retta per prospettiva dell'obbiettiva di cui si parla.

43. *Tutte le rette esistenti in un piano passante pel punto di vista, hanno le loro prospettive che giacciono in una medesima retta.*

Perciocchè egli è evidente che tutti i piani costituiti dalla serie non interrotta dei raggi visuali spettanti alle obbiettive, saranno nel sopra enunciato piano passante pel punto di vista, e che perciò l'intersezione di questo piano colla parete, conterrà in sè le intersezioni di quelli formati dai raggi visuali colla parete medesima. Dunque ecc.

44. *L'ultimo raggio visuale che si può supporre giungere al punto di vista da una retta obbiettiva prolungata all'infinito posteriormente alla parete, si confonde nella sua parte anteriore col raggio di concorso.*

Immaginiamo che la retta obbiettiva *A C* (Fig. II.) inclinata alla parete, sia prolungata all'infinito al di là della stessa, e che da ogni punto della sua estensione sieno condotti al punto di vista dei raggi visuali. Fissando la mente agli angoli che i raggi sopradetti formano coll'obbietti-

va, e più particolarmente, ed a cagion di esempio a quegli angoli formati da'raggi espressi in EA, EB, EC, ecc. sarà facile il concepire che l'angolo spettante al raggio BE sarà minore di quello formato da AE, quello di CE minore di quello di BE, e sempre così, più i raggi si avanzeranno verso la parte infinitamente lontana della AC, andranno per ciò diminuendosi continuamente questi angoli, per cui sempre più vicino ad essere parallelo all'obbiettiva sarà quel raggio proveniente da un più remoto punto, e siccome il punto più lontano dell'obbiettiva si perde nell'infinito, perciò il raggio che l'immaginazione ci fa concepire appartenere ad esso punto non farà più angolo coll'obbiettiva, cioè diverrà parallelo alla medesima.

Adunque la retta HE che si suppone infinita in lunghezza e parallela alla AC, rappresenterà l'ultimo raggio visuale presumibile di questa obbiettiva, e siccome la parte anteriore Ed della linea EH parrallela all'obbiettiva AC fu da noi nominata raggio di concorso; perciò ecc.

45. *Il punto di concorso spettante ad una retta obbiettiva di qualunque lunghezza finita, non può essere raggiunto dalla di lei prospettiva, ma il prolungamento meccanico di questa deve passarvi.*

Rappresenti AC (Fig. II) una retta obbiettiva inclinata alla parete, abbia dessa principio in A e progredisca indefinitamente verso la parte C che si scosta dalla parete medesima. Mostri d il suo punto di concorso ed a la prospettiva del pun-

to di principio A; Ed indicherà l'ultimo raggio visuale presumibile di detta obbiettiva supposta infinita dalla parte C (§ antec.), e quindi ad sarà prospettiva della retta compresa fra A e l'infinito, perciò tutte le lunghezze finite dell' obbiettiva computate da A verso C, saranno espresse prospetticamente da rette ab, ac, ecc. sempre minori di ad.

Il prolungamento delle prospettive ab, ac, ecc. dovrà poi sempre passare pel punto di concorso d, perchè la retta Ed essendo nello stesso piano in cui esistono e l'obbiettiva ed i raggi visuali, cioè in un piano la cui intersezione colla parete contiene le dette prospettive, perciò il punto di concorso d sarà pure in questa comune intersezione, cioè in una stessa retta colle prospettive già menzionate.

46. *Qualunque retta parallela alla parete non ha punto di concorso, oppure, ciò che torna lo stesso, lo ha ad una infinita distanza dal punto principale.*

Perocchè dovendo il raggio di concorso essere parallelo all' obbiettiva, sarà esso pure parallelo alla parete, e perciò non potrà incontrarla, ne quindi determinarne il punto di concorso. Che si possa poi considerare in questo caso il punto di concorso come immensamente distante dal punto principale, risulterà chiarissimo, immaginando che una linea inclinata alla parete e rappresentata in AC (Fig. II), si muova verso la parete medesima ruotando sul punto A, e sempre mantenen-

dosi sul piano determinato da essa AC e dal di lei raggio di concorso indicato in Ed: perciocchè se Ed seguirà questo movimento sempre mantenendosi raggio di concorso, il punto di concorso d progredirà verso y, e si troverà infinitamente distante dal punto principale quando la AC sarà divenuta parallela alla parete.

47. *La linea di concorso di una retta obbiettiva che si muova parallelamente ad un piano qualunque, oppure in esso, è la comune sezione della parete con un piano che passi pel punto di vista, e sia parallelo al piano regolatore del movimento.*

Perciocchè immaginiamo una retta obbiettiva che muovasi prendendo tutte le possibili inclinazioni rispetto alla parete e distanze dal piano regolatore, rimanendo però sempre parallela allo stesso, è evidente che il di lei raggio di concorso seguendo un tale movimento, egli pure dovrà sempre rimanere parallelo al piano ora detto, e di più descrivere un piano, la cui intersecazione colla parete, che sarà una retta pure parallela al suddetto piano regolatore, conterrà in sè il punto di concorso di qualunque posizione dell'obbiettiva immaginata, perciò ecc.

Ne discende da ciò

I. Che se la linea si moverà parallelamente al piano geometrico, la sezione colla parete del piano descritto dal raggio di concorso sarà la orizzontale medesima, e però in essa esisterà il punto di concorso di ogni retta parallela al piano ora nominato, oppure esistente in esso.

II. Se il piano regolatore sarà verticale e perpendicolare alla parete, la linea di concorso sarà allora la direttrice, e però in essa esisterà il concorso di ogni retta parallela al piano regolatore ora detto.

III. Se il piano regolatore sarà verticale ma inclinato alla parete, la linea di concorso sarà la normale innalzata sul punto d' unione della retta di concorso corrispondente colla linea del taglio, cioè sulla projezione comune a tutti i punti di concorso spettanti alla retta mobile.

IV. Se il piano regolatore sarà inclinato alla parete in modo che la comune sezione di questa con quello risulti paralella all' orizzontale, la linea di concorso sarà pure parallela a questa linea.

V. E finalmente se il piano regolatore sarà perpendicolare alla parete ed inclinato comunque al piano geometrico, la linea di concorso sarà una retta passante pel punto principale, e faciente colla fondamentale l' angolo che il piano regolatore anzidetto fa con quello geometrico.

48. *Sia dato un piano obbiettivo inclinato comunque alla parete ed al piano geometrico, ed abbia su di esso tracciata una retta parallela alla parete medesima, dico che la linea di concorso spettante ad una retta che si muova parallelamente a questo piano, è inclinata alla fondamentale come quella tracciata sul piano obbiettivo lo è al piano geometrico.*

Infatti egli è evidente che la retta ora accennata e la sezione del piano obbiettivo colla

parete debbono essere parallele, inoltre il piano costituito dal movimento del raggio di concorso e formante nella sua intersecazione colla parete la linea di concorso spettante alla retta mobile, debb'essere parallelo al piano obbiettivo (§ antec.), quindi la sezione ora nominata, ossia la linea di concorso di cui si discorre e la sezione detta superiormente saranno parallele, perciò ec.

49. *La linea di concorso di una retta obbiettiva, la quale movendosi si mantenga parallela ad un cono a base circolare, retto, ed avente l'asse perpendicolare alla parete, è un circolo col centro nel punto principale.*

Imperocchè il raggio di concorso seguendo il movimento della linea, descriverà un cono simile a quello enunciato, il di cui asse sarà il raggio principale, e perciò la sezione di questo cono colla parete non può essere che un circolo col centro nel punto principale.

Da questo § si deduce.

I. Che varie rette obbiettive esistenti su di un piano o su piani diversi, e che sieno in varj sensi inclinate alla parete con angoli eguali, hanno i loro punti di concorso egualmente distanti dal punto principale.

II. Che se la base del cono regolatore sarà un circolo avente il raggio eguale all'asse di esso cono, le rette ad esso parallele risulteranno sempre ad angolo semiretto colla parete, ed il loro concorso sarà distante dal punto principale quanto è la lunghezza del raggio principale.

50. *La distanza del punto di concorso di una retta inclinata al piano geometrico dalla orizzontale prospettica, è sempre eguale a quella della sua ortografia dalla orizzontale ortografica.*

Immaginiamo condotto un piano orizzontale passante pel punto di concorso, egli è evidente che la ortografia di questo punto esister debbe nell' incontro del piano ora detto con quello ortografico, ma questo piano e la parete sono ambedue verticali, e però se si condurà una retta dal punto di concorso ed un'altra dalla di lui ortografia perpendicolari alla corrispondente orizzontale, queste saranno eguali e costituiranno la distanza dei due punti dalle rispettive orizzontali ora dette; perciò ecc.

51. *Qualunque retta perpendicolare alla parete, ha il di lei concorso nel punto principale.*

Poichè il raggio di concorso debb' essere parallelo all' obbiettiva a cui appartiene, perciò essendo l' obbiettiva perpendicolare alla parete, egli pure dovrà essere perpendicolare alla parete medesima, cioè dovrà coincidere col raggio principale, e quindi il punto di concorso confonderassi col punto principale. Dunque ec.

52. *Qualunque retta inclinata con angolo semiretto al piano geometrico, e che inoltre esista in un piano verticale ed inclinato comunque alla parete, ha il di lei concorso verticalmente distante da quello della sua icnografia, quanto è lungo il raggio di concorso di quest' ultima.*

Sia la normale *p o* (Fig. III) la linea di con-

corso pertinente al piano su cui giace la retta obbiettiva (§ 47, III), sia p il punto di concorso di essa ed m quello della di lei icnografia, il quale pel medesimo § 47, I, III, esister debbe sulla normale po e sulla orizzontale, cioè nella loro scambievole sezione: egli è evidente che l' angolo espresso in pEm mostrerà la inclinazione del raggio di concorso al piano geometrico, la quale inclinazione sarà eguale a quella dell' obbiettiva al piano ora detto, quindi rappresenterà pEm un angolo semiretto, ma essendo indicato in pmE un angolo retto, necessariamente l' angolo mpE dovrà rappresentarne uno semiretto, perciò le due rette pm, mE dovranno essere eguali, dunque ecc.

53. *Tutte le rette obbiettive esistenti su di un piano verticale e ad angolo semiretto alla parete, hanno il loro concorso distante dalla direttrice quanto è la lunghezza del raggio principale.*

Immaginiamo in primo luogo una retta avente la condizione detta nell' enunciato, e che inoltre sia parallela al piano geometrico, egli è evidente che dessa risulterà ad angolo semiretto alla parete, e però potrà riputarsi una posizione della retta mobile detta nel § 49, II, quindi il di lei concorso giacerà sulla orizzontale (§ 47, I), e distante dal punto principale quanto è lungo il raggio principale, ma per l' ora citato § 47, III, tutte le rette esistenti su di un piano verticale aver debbono i loro punti di concorso nella medesima normale, e però ecc.

54. *Due rette obbiettive esistenti in un piano*

verticale e che inoltre siano egualmente inclinate al piano geometrico, ma oppostamente, hanno i loro concorsi su di una medesima normale, ed egualmente distanti dall'orizzontale.

Che i due concorsi debbano esistere su di una medesima normale risulta dal § 47, III. Rappresenti adunque $q\,o$ (Fig. III) la normale accennata, $l\,E$ il raggio di concorso di una retta, $n\,E$ quello dell'altra, ed $m\,E$ quello della corrispondente icnografia. Per l'eguaglianza degli angoli delle obbiettive col piano geometrico, evidentemente anche gli angoli $l\,E\,m$, $m\,E\,n$ saranno eguali, ed essendo pure eguali i due angoli $l\,m\,E$, $n\,m\,E$, cioè retti, ed il lato $m\,E$ comune ad ambedue i triangoli, così si conclude esser gli stessi in tutto eguali, e però ecc.

55. *Tutte le rette obbiettive esistenti su due piani verticali ed egualmente inclinati alla parete, ma oppostamente, hanno i loro concorsi su due normali egualmente distanti dalla direttrice.*

Immaginiamo che su ciascuno dei piani obbiettivi detti nell' enunciato esista una retta parallela al piano geometrico, evidentemente i due raggi di concorso corrispondenti avranno un estremo nella orizzontale e saranno egualmente inclinati col raggio principale, e però con un ragionamento analogo al precedente, si dimostrerà essere i due triangoli formati dal raggio principale quelli di concorso e la porzione di orizzontale compresa fra i due punti di concorso, eguali, e però le due normali su cui esister debbono i concorsi delle ob-

biettive (§ 47, III) saranno egualmente distanti dalla direttrice.

56. *Il punto di concorso di una retta obbiettiva ed il punto principale, sono gli estremi della retta che è projezione del corrispondente raggio di concorso sulla parete.*

E ciò è per sè manifesto, poichè il punto di concorso esiste sulla parete ed è un estremo del relativo raggio di concorso (§ 22), e questo stesso raggio ha l'altro estremo nel punto di vista, la di cui projezione sulla parete è il punto principale (§ 27), quindi ecc.

57. *La projezione di una retta obbiettiva sulla parete e quella del corrispondente raggio di concorso, sono parallele.*

Imperocchè se faremo passare due piani, uno per la retta e l'altro per il raggio di concorso detti nell' enunciato, i quali sieno perpendicolari alla parete, essi saranno paralleli, e pure parallele saranno le sezioni di essi colla parete medesima, ma evidentemente in queste sezioni esister debbono le projezioni di cui si ragiona, e perciò ecc.

58. *L'ortografia di una retta obbiettiva e quella del corrispondente raggio di concorso, sono parallele.*

Si dimostra come nel precedente §.

59. *La linea d' incontro di un dato piano obbiettivo, è parallela alla linea di concorso di una retta che movendosi si mantenga parallela al piano ora detto.*

Imperocchè il raggio di concorso nel seguire il moto dell' obbiettiva, descriverà un piano parallelo a quello obbiettivo sopradetto (§ 47), ma la linea d' incontro e quella di concorso altro non sono che le intersecazioni di questi piani colla parete, quindi esse pure saranno parallele

Dal detto emerge

I. La linea d' incontro di un piano verticale, sarà la normale insistente sul punto d' incontro della corrispondente icnografia (§ 47, III).

II. La linea d'incontro di un piano avente la comune sezione di esso colla parete parallela all' orizzontale, sarà essa pure parallela a quest'ultima linea (§ 47, IV).

III. La linea d' incontro di un piano la cui comune sezione col piano geometrico sia perpendicolare alla linea del taglio, cioè di un piano perpendicolare alla parete, sarà una retta passante pel punto d' incontro della comune sezione sopradetta, ed inclinata alla fondamentale quanto è l' inclinazione del piano obbiettivo col geometrico (§ 47, V).

IV. E finalmente la linea d' incontro di un piano inclinato comunque alla parete sarà inclinata alla fondamentale, come una retta tracciata su di esso piano parallelamente alla parete lo è al piano geometrico (§ 48).

60. *Il punto d' incontro di qualunque retta obbiettiva e la di lui projezione sul piano ortografico, conservano la medesima distanza dalla corrispondente fondamentale.*

S'immagini un piano orizzontale passante pel punto d'incontro, come fu detto nel § 50 per quello di concorso, e con un ragionamento analogo si dimostrerà la verità dell' enunciato.

Ne discende immediatamente che il punto d'incontro di una retta obbiettiva parallela al piano geometrico è distante dalla fondamentale prospettica, di quanto è la distanza della corrispondente ortografia dalla fondamentale ortografica.

61. *I punti d' incontro di due rette parallele, sono sempre fra loro distanti quanto è la lunghezza di una retta parallela alla parete, avente gli estremi nelle due rette parallele accennate.*

Supponiamo un piano passante per le linee parallele, egli è evidente che la linea d' incontro di questo supposto piano e quella parallela alla parete esisteranno nello stesso, quindi evidentemente l' una linea sarà parallela all' altra. Ora i punti d' incontro delle due rette dette nell' enunciato esisteranno nella linea d' incontro del piano immaginato, e costituiranno gli estremi di una retta, formante colla linea parallela alla parete e le due parallele tra loro un parallelogrammo, di cui le due prime saranno i lati opposti, perciò ecc.

62. *Nella normale insistente sulla projezione di un punto prospettico, di concorso, o d'incontro, esiste il corrispondente fra i punti ora nominati.*

Infatti immaginiamo un piano verticale passante per cadauno dei punti detti nell' enuncia-

to, egli è evidente che la loro particolare projezione esister debbe nella sezione del corrispondente piano colla parete, ma le normali rappresentano appunto sezioni di piani verticali con essa parete, e però ecc.

63. *La retta che passa pei punti di concorso e d'incontro spettanti ad una data obbiettiva, costituisce la direzione prospettica di questa.*

Imperocchè facciamo passare un piano per la retta obbiettiva e pel punto di vista, evidentemente il punto di concorso, il punto d'incontro e la prospettiva della retta sopraccennata esisteranno nella linea che è comune sezione di questo piano colla parete; perciò ecc.

64. *La prospettiva di una retta obbiettiva parallela alla parete ed esistente in un piano inclinato comunque alla parete medesima, è sempre parrallela alle linee di concorso e d'incontro spettanti al suddetto piano.*

Infatti altro non essendo la linea d'incontro del piano su cui esiste l' obbiettiva e la prospettiva di questa, che le sezioni di due piani passanti per essa obbiettiva colla parete alla quale è parallela l'obbiettiva medesima, egli è evidente che le due prime saranno parallele a quest'ultima linea, e quindi parallele tra loro; ma nel § 59 abbiam già veduto che le linee di concorso e d'incontro spettanti ad un piano obbiettivo sono parallele, perciò ecc.

Da questo ne discende

I. La prospettiva di ogni retta parallela alla

parete ed al piano geometrico è parallela all'orizzontale (§ 47, I, IV)

II. La prospettiva di qualunque retta verticale è parallela alla direttrice (§ 47, II, III). A questa considerazione può aggiungersi, che dovendo, come è evidente, tali linee essere projettate in un punto, così la normale insistente su ciascuno di questi, costituirà altresì la direzione prospettica della corrispondente obbiettiva.

III. La prospettiva di ciascuna retta parallela alla parete ma inclinata al piano geometrico, è inclinata alla propria fondamentale come l'obbiettiva alla sua icnografia (§ 47, V e § 48).

65. *Una retta obbiettiva inclinata alla parete, che ha un estremo in un piano passante pel punto di vista parallelamente alla stessa ed è infinita dalla parte anteriore (e) al punto di vista, ha la di lei prospettiva finita in quella parte che corrisponde a quella infinita dell' obbiettiva, e viceversa infinita nell' altra corrispondente alla parte finita.*

Immaginiamo il raggio di concorso di detta obbiettiva: il punto di concorso da esso determinato sarà il fine della prospettiva, corrispondente alla parte infinita dell' obbiettiva, e questo punto troverassi ad una distanza finita dal punto principale: ora divenga raggio visuale il raggio di concorso, e sempre mantenendosi raggio visuale ruoti esso sul punto di vista fino a prendere una posizione parallela alla parete, nel di lui movimento questo raggio traccerà la prospettiva della retta in quistio-

ne, e giunto che sia alla posizione parallela, darà un punto prospettico infinitamente distante dal punto principale, il quale sarà prospettiva di quell' estremo della retta che giace nel sopprannunciato piano passante pel punto di vista.

Immediatamente discende da quanto abbiam detto, che una lunghezza infinita può avere una prospettiva finita, e che un' altra di lunghezza finita può generare una prospettiva infinita.

66. *Tutte le rette obbiettive seganti una medesima retta che parte dal punto di vista ed incontra la parete, hanno le loro prospettive che passano per l' ora detto punto d' incontro.*

Rappresenti E (Fig. IV) il punto di vista, $hgil$ la parete, ed AB, CD, GH, IH, ecc. un sistema qualunque di rette tutte seganti la EF che parte dal punto di vista ed incontra la parete nel punto mostrato in m. Sieno indicate, in B, D, H le intersezioni delle obbiettive colla EF, egli è evidente che i raggi visuali spettanti alle intersecazioni suddette si confonderanno tutte colla EF, adunque detti raggi taglieranno la parete in un medesimo luogo m che sarà prospettiva comune dei punti B, D, H; ma i punti B, D, H appartengono alle obbiettive AB, CD, ecc. e le prospettive di quelli debbono esistere nelle prospettive di queste, dunque esse passeranno tutte pel punto m.

67. *Tutte quelle rette anteriori al punto di vista, le quali incontrano una stessa retta passante pel punto di vista parallelamente alla pare-*

te, hanno le prospettive parallele alla projezione della retta suddetta sulla parete medesima.

Restando ferme le denominazioni del § antecedente, immaginiamo che la EF ruotando sul punto di vista, si muova lungo la retta indefinita mm'' seco traendo il sistema di rette AB, CD, ecc. e venga a prendere una posizione EF' parallela alla parete; è evidente che il punto m si scosterà dal punto principale e, e troverassi infinitamente distante da esso quando la retta EF avrà acquistata la posizione parallela alla parete, ma il punto m sempre rappresenta nelle successive di lui posizioni m', m'' ecc. un punto per cui passeranno ad ogni istante del movimento le prospettive delle rette AB, CD ecc. non che la retta EF, (§ antec.), ora trovandosi m infinitamente distante quando EF diviene parallela alla parete, perciò le rette prospettiche che sopradicemmo non potranno in questo caso incontrare la EF che ad una infinita distanza dal punto principale, cioè saranno parallele ad essa, ma essendo EF' parallela alla parete, la di lei projezione ef le sarà evidentemente parallela, quindi pure le prospettive delle rette $I'H'$, $G'H'$ ecc. saranno parallele alla suddetta projezione.

68. *Tutte le rette obbiettive inclinate alla parete e situate anteriormente al punto di vista, i cui prolungamenti segano una stessa retta che partendo dal punto di vista procede posteriormente ad esso, hanno i prolungamenti delle loro prospettive che si segano in quel punto in cui la*

retta sopradetta prolungata incontra la parete, e gli estremi di esse prospettive da cui partono i prolungamenti sumenzionati, corrispondono agli estremi delle obbiettive che protratti si allontanano dalla retta più volte accennata.

Rappresentando $E\,F''$ una retta posteriore al punto di vista, ed $A''\,B''$, $C''\,D''$ ec. un sistema di rette che prolungate incontrano la $E\,F''$ nè punti B'', D'', H'', sia prolungata la $E\,F''$ sino ad incontrare la parete, e mostri n questo punto d'incontro, finalmente si supponga che per ognuna delle rette $A''\,B''$, $C''\,D''$ ecc. e sempre per la $E\,F''$ passi un piano; è evidente che ciascuna delle intersecazioni di questi piani colla parete conterrà la prospettiva della retta obbiettiva corrispondente, ed inoltre è pure evidente che il punto n sarà un punto comune alla parete ed a ciascuno de' piani sopradetti, cioè a dire che le intersecazioni sopranominate avranno comune il punto n; ma le prospettive in quistione sono parti di esse intersecazioni, quindi prolungate si taglieranno nel punto n.

Che le prospettive da cui partono i prolungamenti che si tagliano nel punto n corrispondono agli estremi A'', C'', G'', I'' delle obbiettive più lontani dalla $E\,F''$, si deduce dalle seguenti considerazioni. 1.° Che il punto di concorso di una qualunque di queste linee deve esistere fra il suo punto d'incontro ed il punto n, imperocchè, prendendo per esempio $G''\,H''$ i di cui punti d'incontro e di concorso sono rappresentati in s, s', egli è evidente che il raggio di concorso dovendo essere parallelo alla

$H'' G''$, incontrerà sempre $s n$ in un punto fra s ed n. 2.° Che tale punto di concorso è l'estremo punto prospettico della corrispondente obbiettiva prolungata all'infinito dalla parte anteriore al punto di vista, e che quindi mentre le obbiettive progrediranno verso l'infinito dalla parte sopradetta, le loro prospettive si accosteranno al punto n, ciascuna non oltrepassando però mai il punto di concorso che la risguarda (§ 45).

69. Da questi ultimi tre § ne discende

I. Che più rette obbiettive che si tagliano in un medesimo punto situato anteriormente al punto di vista, hanno le parti convergenti delle loro porspettive corrispondenti alle convergenti delle obbiettive (§. 66).

II. Che più rette obbiettive che si tagliano in un punto situato in un piano passante pel punto di vista parallelamente alla parete, hanno le loro prospettive parallele (§ 67).

III. E finalmente che più rette obbiettive le quali si tagliano in un punto situato posteriormente al punto di vista, hanno le parti convergenti delle loro prospettive corrispondenti a quelle divergenti delle obbiettive (§ 68).

70. *Una retta obbiettiva posteriore perpendicolare e terminante alla parete è uguale alla di lei prospettiva, quando la distanza del punto principale dal punto d'incontro di essa obbiettiva, sia uguale alla lunghezza insieme presa dell'obbiettiva e del raggio principale.*

Rappresenti $m n$ (Fig. II) l'obbiettiva, n e la

intersezione colla parete di un piano passante pel raggio principale eE e per la mn, e sia questa ne eguale ad mn più eE. Prendiamo sulla ne una parte no uguale ad nm, evidentemente sarà oe uguale ad eE, e se si uniranno i punti m, o ed o, E, essendo i lati mn, no e gli altri oe, eE uguali, i triangoli mno, oeE saranno isosceli, e di più essendo gli angoli in n ed e retti, li due nom, eoE saranno uguali perchè semiretti, e però le due mo, oE costituiranno una sol retta, la quale partendo dal punto di vista E e passando per m, rappresenterà il raggio visuale spettante al punto m, e quindi no sarà la prospettiva di mn.

Discende da codesto §

Che una retta obbiettiva posteriore perpendicolare e terminante alla parete è maggiore della di lei prospettiva, quando la distanza del punto principale dal punto d' incontro di essa obbiettiva, è minore della lunghezza insieme presa dell'obbiettiva e del raggio principale, e viceversa sarà l' obbiettiva predetta minore della prospettiva di lei, nel caso che il raggio principale e l' obbiettiva formino una lunghezza maggiore della distanza tra il punto principale ed il punto d'incontro dell' obbiettiva.

71. *La prospettiva di un poligono qualunque esistente in un piano parallelo alla parete, è sempre un poligono simile a quello obbiettivo.*

Perchè i poligoni simili sono quelli in cui ciascun angolo dell'uno uguaglia il corrispondente

dell' altro, e che d'intorno agli angoli eguali hanno i lati proporzionali, perciò dovremo dimostrare ne' poligoni obbiettivo e prospettico amendue queste proprietà di relazioni. Prendiamo a cagione di esempio il poligono obbiettivo espresso in $XVYZ$ (Fig. V), la cui prospettiva viene mostrata in $xvyz$. In primo luogo egli è evidente che se immagineremo protratti i due lati VX, VY sino ad incontrare i prolungamenti della retta che è icnografia del poligono obbiettivo, e si protraranno pure i due corrispondenti vx, vy del poligono prospettico sino alla fondamentale, avremo con ciò costituiti due triangoli i di cui angoli alla base saranno eguali (§ 64, III) uno ad uno, e quindi pure il terzo xvy sarà uguale al corrispondente XVY; nell' egual modo, oppure con alcune modificazioni facili a rinvenirsi, si dimostrerà l' uguaglianza rispettiva degli altri angoli. In secondo luogo essendo XV parallela ad xv e VY a vy, avranno luogo le seguenti proporzioni,

$$VE : vE :: XV : xv :: VY : vy \text{ e però}$$
$$XV : VY :: xv : vy$$

ed il detto valendo per gli altri lati; perciò ecc.

Intorno alla determinazione del contorno apparente delle superficie curve.

72. Tutte le curve che possono essere alla prospettiva presentate da un obbiettivo, sono come fu detto (§ 9), intersecazioni di superficie e con-

torni di ombre, oppure termini di parti visibili di superficie curve, che è quanto dire, contorni apparenti di queste superficie considerate di per sè. Delle prime si potrà immediatamente ricercare le prospettive, poichè dipendendo esse dall'assoluto modo di essere dell'obbiettivo che si debbe tradurre in prospettiva, saranno espresse nella icnografia e nella ortografia di lui, non così delle seconde, le quali dipendendo dalla collocazione arbitraria del punto di vista, solo avranno esistenza determinata quando questa collocazione sarà stabilita, adunque trattandosi di descrivere l'immagine di una superficie curva, la quale immagine altro non è che la prospettiva del contorno apparente di essa superficie, il prospettico non potrà giugnere a questa descrizione, se egli non sappia come determinare la posizione obbiettiva di ogni punto del contorno apparente suddetto.

73. Il primo concetto che si presenti al pensiero onde determinare il contorno apparente di una superficie continua qualunque, quello si è di segarla in varj luoghi con de' piani che tutti passino per la linea di stazione, e di poi conducendo dal punto di vista delle tangenti alle comuni sezioni dei piani colla superficie, ottenere così ne' punti di contatto tanti punti spettanti al contorno apparente, ma questo processo riuscendo quasi nella universalità dei casi oltremodo laborioso, sarà quindi utile cosa il ricercare, per quelle superficie delle quali occorre più frequentemente di descrivere le immagini, de' metodi più spediti.

Ora le architetture che sono i soggetti più comuni delle prospettive, ci presentano per lo più superficie di rivoluzione (*f*), a queste perciò ristringeremo principalmente le nostre indagini.

74. *Se per l'asse di una superficie di rivoluzione obbiettiva generata da una curva si conduca un piano, e su di questo si faccia la projezione del punto di vista, le tangenti che da questa projezione veranno condotte alla comune sezione del piano colla superficie, determineranno ne' loro punti di contatto tanti punti appartenenti al contorno apparente della superficie obbiettiva.*

Sia PQ (Fig. V) una superficie obbiettiva, generata dalla rivoluzione intorno all' asse lm di una figura simmetrica, e simile a quella mostrata in bd, la quale superficie è quella che dagli Architetti vien detta toro. Rappresenti E il punto di vista, $FGHD$ un piano passante per l' asse, $BlDm$ la comune sezione di questo piano colla superficie obbiettiva, E' la projezione del punto di vista E sul piano $FGHD$, e finalmente $E'B$, $E'D$ due tangenti condotte alla comune sezione $BlDm$, le quali la tocchino ne' punti B, D che si dicono appartenere al contorno apparente della superficie obbiettiva. Diffatti, immaginiamo un piano il quale passi per la $E'B$ e che non seghi la superficie ma la tocchi nel solo punto B, cioè sia tangente ad essa; questo piano dovrà necessariamente essere perpendicolare all' altro $FGHD$; imperocchè la superficie obbiettiva è divisa in due parti perfettamente eguali e simili da esso

piano $FGHD$; quindi quello immaginato dovrà passare per E. Ora egli è evidente che qualunque retta condotta in questo piano e passante per B toccherà la superficie nel solo punto B, e perciò una retta tracciata pei punti EB esistendo nell' ora detto piano perpendicolare a quello $FGHD$, sarà tangente alla superficie del solido, e quindi potrà riputarsi una posizione di quella retta mobile che al § 8 immaginammo onde concepire la generazione del contorno apparente delle superficie curve, della quale la $E'B$ sarà la projezione sul piano $FGHD$. Un simile ragionamento valendo anche per la retta $E'D$, perciò ecc.

Discende da cotesto §, che i punti di contatto di qualunque tangente che dalla projezione del punto di vista fatta su di un piano, si guida alla comune sezione di questo con una superficie continua, apparteranno sempre al contorno apparente di lei, qualora il piano ora detto sia perpendicolare alla superficie pur or accennata.

75. Conoscendosi la natura di quella linea che è contorno apparente di un dato oggetto conterminato da superficie curva, si può alcune volte, deviando da' metodi generali, accorciare d' assai la determinazione della prospettiva di lui, e specialmente quando detto contorno esista in un piano, perciò, affine di potere quando tratteremo delle operazioni grafiche prospettiche dare un saggio di tali deviazioni, diremo qual sia l' indole del contorno apparente spettante ad alcuna delle più semplici fra le superficie curve, e che d' altronde sono nella prospettiva molto usitate.

76. *Il contorno apparente di un cono, per la parte che spetta alla sola superficie continua, cioè escluso lo spigolo formato da essa superficie colla di lui base, consta di due linee rette concorrenti nel vertice del cono medesimo.*

Poichè superficie conica dicesi quella la quale viene generata dal movimento di una retta (*la generatrice*) che fissa in un dato punto, cioè nel vertice, si muova lambendo una curva qualunque (*la direttrice*), ne viene da ciò, che considerando la direttrice come un poligono di lati infinitamente piccoli, la generatrice descriverà nel suo movimento una piramide a facce pure infinitamente piccole, della quale il contorno apparente, esclusa la base, consisterà come è manifesto, in spigoli della piramide, cioè in due posizioni della generatrice.

77. *Il contorno apparente di un cilindro, per la parte che spetta alla superficie continua, consta di due rette parallele.*

Potendosi ogni cilindro considerare come un cono il cui vertice sia infinitamente lontano da qualsiasi delle due basi, perciò il ragionamento fatto nel § antecedente varrà anche per questo caso.

78. *Il contorno apparente di una superficie di rivoluzione, quando il prolungamento del di lei asse passa pel punto di vista, è un circolo al cui piano è perpendicolare l' asse della superficie.*

Infatti immaginiamo un piano che seghi la superficie passando per l' asse della medesima, e

quindi sia tolta la superficie, rimanendo però sul piano la traccia della comune sezione di questo con quella. Si guidi dal punto di vista una tangente alla comune sezione, e dal punto di contatto che ne verrà una perpendicolare all'asse, facendo ruotare intorno all'asse medesimo la comune sezione insieme alla tangente, la prima riprodurrà la superficie di rivoluzione, e la seconda sarà generatrice di un cono avente il vertice nel punto di vista, e toccante la superficie nella linea descritta dal punto di contatto; questa linea adunque sarà il contorno apparente della superficie, ma il punto di contatto è l'estremo di una retta perpendicolare all'asse intorno a cui si fa la rivoluzione; dunque il contorno apparente non potrà essere che un circolo col centro in un punto dell'asse, al cui piano sarà perpendicolare l'asse suddetto.

79. *Il contorno apparente di una sfera è sempre un circolo, al cui piano è perpendicolare la retta che unisce il punto di vista col centro di essa.*

Imperocchè sia unito il centro della sfera col punto di vista da una retta indefinita, e facciasi passare un piano per questa retta, esso piano segherà la sfera in un circolo massimo, il quale ruotando intorno alla retta sarà atto a riprodurre la sfera medesima, quindi la sfera si potrà sempre considerare come una superficie di rivoluzione che abbia l'asse passante pel punto di vista, e perciò pel § 78 il di lei contorno apparente sarà sempre un circolo.

80. *Il contorno apparente di una ellissoide, cioè della superficie generata dalla rivoluzione di un' ellisse intorno ad uno de' suoi assi, è una ellisse od un circolo.*

Sarà un circolo quando il prolungamento dell'asse su cui si è fatta la rivoluzione passa pel punto di vista (§ 78). Nel caso opposto supporremo noto, 1.° che la sezione fatta da un piano in una ellissoide non perpendicolare al suo asse di rotazione è sempre un' ellisse; 2.° che tutte le sezioni di piani paralleli sono ellissi simili, cioè aventi gli assi ed i diametri corrispondenti proporzionali, e quindi prese queste sezioni a due a due potrebbero capire in un cono. Ciò posto immaginiamo due piani paralleli che seghino l' ellissoide, e sieno tali sezioni rappresentate dalle ellissi $ACBD$ $acbd$ (Fig. VI), sulle quali immagineremo formato un cono, il di cui vertice rappresentato in e sarà, come è noto, in una retta coi centri DD' delle sezioni, e segherà anch'esso l'ellissoide nelle sezioni dei due piani. Immaginiamo ora prolungata la retta eD' dalla parte di e, e che restando fermo il piano che forma l'ellisse che è base del cono l' altro piano si avvicini al primo. È chiaro che a misura che il piano mobile si accosterà all' altro, la sezione $acbd$ si allargherà, e quindi il cono si allungherà allontanando il vertice da e lungo la retta ED', e giunti che sieno i due piani a confondersi, il cono che prima segava l' ellissoide non la toccherà più che in una linea, cioè sarà tangente ad essa ellissoide nell' ellisse $ACBD$, for-

mata dai punti di contatto del cono *E A C B D*. Si vede adunque che se noi supponessimo il punto di vista collocato in *E*, la serie non interrotta dei raggi visuali formerebbe il cono *E A C B D*, ed il contorno apparente dell' ellissoide in quistone sarebbe l'ellisse *A C B D*. (*)

Teorie prospettiche delle curve

81. Coerenti a ciò che dicemmo nel § 40, abbiamo nelle teorie prospettiche delle rette stabilito non solo que' principj da' quali, quando tratteremo delle operazioni grafiche, emergerà un metodo generale per la determinazione della prospettiva di un punto, ma abbiamo pure fatto ricerca di tutte quelle verità, le quali nei casi particolari possono servire a ridurre le operazioni prospettiche spettanti a rette a quella maggior semplicità di cui sono suscettibili, inoltre, per le cose testè dette riguardo al contorno apparente delle superficie curve, potendosi ora considerare come determinata di forma e posizione ogni curva che la prospettiva può riscontrare in un obbiettivo, altro non manca a compiere questo capo che di ragionare sulla prospettiva delle linee curve. Ed incominceremo col dire che le cose fino ad ora esposte basterebbero per giugnere alla descrizione di ogni curva prospettica, qualora si volesse unicamente seguire il metodo approssimativo accennato nel § 40, quello cioè di ricercare la prospet-

(*) Tramontini, *Projezioni grafiche.*

tiva di una serie di punti appartenenti alla curva proposta. Ma questo processo oltre di essere assai laborioso, specialmente quando la curva è di grande dimensione e che si vuole ottenere un' approssimazione alquanto vicina, ha poi il non lieve incomodo di caricare soverchiamente la parete con linee estranee all'immagine dell'oggetto; sarà adunque vantaggioso il ricercare se vi sieno altri metodi onde descrivere le curve prospettiche, e se convenga usarli.

82. In primo luogo egli è manifesto che qualora le curve obbiettive sieno irregolari, capricciose, come sarebbero quelle presentate da certi ornamenti architettonici, il metodo del § 40 sarà, generalmente parlando, l'unico possibile.

83. Non sarà così quando la curva proposta sia il prodotto di una legge costante, come per esempio se fosse un circolo. Infatti ella è verità facile a rinvenirsi per coloro alquanto innoltrati nello studio delle matematiche, che qualunque curva la quale sia prospettiva di altra avente ciascun suo punto determinato di posizione da una legge costante, è dessa pure soggetta a legge; ma ogni curva che abbia questo carattere, in due modi dipendenti dalla natura di lei si può descrivere, cioè per approssimazione col mezzo di un' operazione grafica atta a dare un punto qualunque della medesima, o per moto continuo servendosi di uno strumento espressamente costrutto. Adunque in questo caso le curve prospettiche ammetteranno altri metodi di descrizione. Così per esempio,

la prospettiva di un circolo parallelo alla parete debb' essere, come vedremo al § 87, pure un circolo, che è una curva di cui ciascun punto ha per legge il trovarsi equidistante da quello che si nomina centro; ed è evidente che sarà possibile il descrivere esso circolo prospettico ne' due seguenti modi, cioè per approssimazione segnando tanti punti tutti ad eguale distanza da quello che ne debb'essere centro e quindi conducendo per questi punti una curva a mano, e per moto continuo col soccorso di un compasso.

84. Dovendo poi le curve prospettiche avere grandezza e posizione determinata, non sarà sufficiente onde descriverle il conoscere la loro natura, ma sarà pure mestieri di rinvenire il luogo e la dimensione di certe linee e punti che servono di base alle descrizioni che sopradicemmo. Così nell' esempio di sopra proposto non basterà il sapere che la prospettiva del circolo obbiettivo è dessa pure un circolo, ma per descrivere questa prospettiva converrà rintracciare la posizione del centro e la lunghezza del raggio di lei. Adunque le indagini da farsi per ottenere questi metodi di descrizione saranno di due specie; primo dalla natura della curva obbiettiva dedurre quella della prospettiva corrispondente, ed in secondo luogo dedurre dalla medesima curva obbiettiva quei dati che sono necessarj per eseguire le descrizioni sopradette.

85. Le curve regolari sono di numero infinito, e se quelle che sogliono proporsi da disegnare

fossero assai varie, sarebbe miglior consiglio l'accontentarsi anche per queste della descrizione del § 40, imperocchè ciascuna di queste curve richiedendo due serie particolari d'indagini onde poter giugnere alle altre descrizioni, sarebbe perciò necessario di spendere molto tempo in ricerche, le quali molte volte condurrebbero a risultamenti da rigettarsi, perchè complicatissimi, e d'altronde i più degli artisti forse con ragione si rifiuterebbero a caricare la loro mente con un gran numero di regole; ma per ventura quelle curve che per l'ordinario si presentano nella pratica in dimensioni tali da rendere incomoda la generale descrizione per punti, non solo sono di numero ristrettissimo, cioè circoli ed ellissi, ma per esse i metodi di cui si ragiona riescono assai semplici; quindi passeremo a fare per le curve ora nominate le due serie d'indagini che sopradicemmo.

86. *La prospettiva di una curva qualsiasi esistente in un piano passante pel punto di vista, è una retta.*

Poichè tutti i punti di questa curva sono in un medesimo piano che passa pel punto di vista, così pure in questo piano saranno i raggi visuali spettanti ad essi punti, e perciò la loro serie non interrotta costituirà un piano, il quale segato da quello della parete non potrà dare che una retta per prospettiva della curva che ha la condizione sopra enunciata.

87. *La prospettiva di ogni curva esistente in*

un piano parallelo alla parete, è una curva simile a quella obbiettiva.

Giacchè qualunque curva può dirsi un poligono d' infiniti lati, adunque pel § 71 la curva prospettica sarà un poligono d' infiniti lati simile a quello costituente la curva obbiettiva, quindi l'una curva sarà simile all' altra.

88. *La prospettiva di un circolo o d' una ellisse per intiero situati anteriormente al punto di vista, è sempre circolare od ellitica.*

Imperocchè immaginiamo una retta fissa con un estremo nel punto di vista, e che si muova colla parte libera lambendo il perimetro di una qualsiasi di queste curve; egli è evidente che in ciascuna posizione questa linea avrà il carattere d' un raggio visuale della curva obbiettiva, cioè essa partirà dal punto di vista passerà pel punto obbiettivo ed incontrerà la parete, ma la linea mobile descriverà una superficie conica, quindi i raggi visuali costituiranno una superficie conica interamente tagliata dalla parete, e perciò sarà chiusa la curva prospettica risultante, ma ogni persona mediocremente versata nello studio delle matematiche sa che qualunque curva chiusa proveniente dalla sezione di un piano con un cono non può essere che circolare od elittica, quindi ecc.

89. Formando la non interrotta serie dei raggi visuali spettanti alle curve obbiettive circolari od ellittiche, come vedemmo, un cono, altre curve potrebbero risultare nella prospettiva a seconda

della varia situazione delle obbiettive suddette, vale a dire una *parabola* (App. II) quando la curva obbiettiva s'innoltri verso il punto di vista sino a toccare un piano che passi per questo parallelamente alla parete, ed un' *iperbole* (App. II) quando porzione della stessa curva oltrepassi un tal piano, ma essendo tali casi assai rari nella pratica prospettica, e la descrizione grafica delle curve paraboliche ed iperboliche appoggiata alla natura di esse richiedendo delle operazioni certamente più lunghe di quella per punti accennata nel § 40, così, tralascieremo le descrizioni di queste, e ristringeremo le nostre indagini al solo caso che la prospettiva risulti un'ellisse od un circolo. I dati che servono di base alla descrizione della ellisse o del circolo per punti indipendentemente dalle operazioni prospettiche, oppure con moto continuo mediante uno strumento essendo gli *assi* od i *diametri* (App. II), la determinazione di questi per le ellissi o circoli prospettici sarà ora lo scopo delle nostre ricerche.

90. *Rimangono pure tangenti l' una all' altra la prospettiva di una curva obbiettiva e quella di una tangente di lei.*

Imperocchè potendosi considerare ogni curva come un poligono di lati immensamente piccoli, così potrà dirsi altro non essere la tangente che il prolungamento di uno di questi lati, ora l' insieme di essi rappresentati sulla parete darà per curva prospettica un poligono di latercoli pure immensamente piccoli, ed è poi chiaro che

la prospettiva della tangente non sarà altra cosa che un latercolo della curva prospettica prolungato, cioè una tangente di essa.

91. *Se un circolo obbiettivo ha le seguenti condizioni, cioè sia tutto anteriore al punto di vista, esista in un piano perpendicolare ad un altro che passi verticalmente pel raggio principale, ed inoltre abbia il di lui centro nel piano verticale suddetto, dico che la prospettiva di esso sarà un' ellisse avente un asse orizzontale e l' altro perciò verticale, e che l' asse orizzontale sarà la prospettiva della retta che unisce i punti di contatto di due tangenti guidate al circolo obbiettivo, da quel punto in cui il prolungamento del diametro che esiste nel supposto piano verticale incontra la linea di stazione, oppure il di lei prolungamento, mentre l' asse verticale sarà la prospettiva del diametro ora accennato.*

Così sarà pure di un' ellisse che oltre alle condizioni accennate, abbia un asse nel piano verticale passante pel raggio principale.

Sia $A\,D\,B\,C$ (Fig. VII.) il circolo obbiettivo, $E\,E'$ la linea di stazione prolungata indefinitamente, $A\,B$ la sezione del piano in cui esiste il circolo col piano verticale accennato, cioè sia $A\,B$ il diametro che giace in questo piano, e sia $A\,E'$ il prolungamento di esso, il quale incontri la linea di stazione in E': $D\,E'$, $C\,E'$ sieno le tangenti guidate da E' al circolo obbiettivo, e finalmente $D\,C$ la retta che unisce i punti di contatto delle tangenti ora menzionate. Si vuole dimo-

strare che le prospettive di *C D*, *A B* saranno gli assi dell' ellisse prospettica, e che di questi assi quello corrispondente a *C D* sarà orizzontale, e quello corrispondente ad *A B* verticale.

Infatti la retta *A B* dividendo il circolo in due parti eguali e similmente poste rispetto alla parete al piano verticale ed al punto di vista, egli è manifesto che la prospettiva dell'una parte dovrà essere non solo eguale e simile a quella dell'altra, ma che dovrà quell' arco dell' ellisse prospettica che sarà l'immagine di *A C*, corrispondere a quello rappresentante l' altro *A D*, perciò la prospettiva della retta *A B*, che risulterà verticale pel § 67, sarà un' asse dell' ellisse (vedi App. II). Di più per la simile posizione or accennata delle parti *A C B*, *A D B*, i punti di contatto *C*, *D* essendo all'egual condizione rispetto al piano della parete a quello passante pel raggio principale ed al punto di vista, sarà adunque la retta *CD* parallela alla parete e perpendicolare al piano verticale, e quindi la di lei prospettiva risulterà orizzontale (§ 64. I.). Ma l'immagine delle rette $E' C$, $E' D$ debbono essere fra loro parallele (§ 67) e tangenti all' ellisse (§ 90), quindi la prospettiva di *C D* sarà un diametro dell' ellisse medesima (vedi App. II.), e però la prospettiva di essa *C D* tagliando ad angolo retto l'asse verticale di sopra nominato e passando pel centro dell'ellisse, sarà l'altr' asse della stessa.

Si ripeterà un discorso analogo se l'obbiettivo sarà un' ellisse.

92. *La ellisse che è prospettiva di un circolo verticale tutto anteriore al punto di vista, ed avente il centro distante dal piano geometrico quanto è lunga la linea di stazione, ha un asse sulla orizzontale e quindi l'altro verticale. L'asse orizzontale è la prospettiva del diametro del circolo parallelo al piano geometrico, e l' asse verticale sarà la prospettiva di una retta che unisca i punti di contatto spettanti a due tangenti, guidate al circolo obbiettivo da quel punto in cui il diametro or accennato incontra una linea passante pel punto di vista parallelamente alla orizzontale.*

Lo stesso dicasi di un' ellisse avente, oltre le condizioni sopraccennate, un asse parallelo al piano geometrico.

Rappresenti $A' C' B' D'$ (Fig. VII) il circolo obbiettivo, $E E''$ una linea passante pel punto di vista E parallelamente alla orizzontale, $A' B'$ il diametro parallelo al piano geometrico, $A' E'$ il di lui prolungamento che incontri la $E E''$ in E'', sieno $C' E''$, $D' E''$ le tangenti guidate dallo stesso punto E'' al circolo, e $C' D'$ la corda che unisce i punti di contatto C', D'. Si vuol dimostrare che le prospettive delle rette $A' B'$, $C' D'$ sono gli assi dell' ellisse prospettica, e che di questi assi quello corrispondente alla $A' B''$ sarà orizzontale, risultando poi l'altro necessariamente verticale.

Immaginando un piano passante pel raggio principale e per la $E E''$, il quale passerà evidentemente anche per la $A' B'$ e sarà orizzontale, si

vede che il circolo obbiettivo avrà rispetto a questo piano alla parete ed al punto di vista, le stesse condizioni che il circolo di cui fu ragionato nel § antecedente aveva rispetto al piano verticale al punto di vista ed alla parete, quindi la verità enunciata si dimostrerà in modo analogo a quello del § ora citato.

93. *Se da un punto del piano passante pel punto di vista parallelamente alla parete si conducano due tangenti ad un circolo obbiettivo oppure ad una ellisse comunque inclinati al piano geometrico, e di poi si prolunghi la corda corrispondente ai punti di contatto così determinati fino ad incontrare il summentovato piano passante pel punto di vista, e che finalmente da questo punto d'incontro si guidi un'altra tangente al circolo obbiettivo, dico che la retta che unisce la prospettiva dei due primi punti di contatto sarà un diametro dell' ellisse prospettica, e che la prospettiva del terzo punto sarà un estremo del* diametro conjugato (vedi App. II) *corrispondente al sopradetto.*

Rappresenti MNO (Fig. VII) il circolo oppure la ellisse obbiettiva, $TVZX$ un piano passante pel punto di vista E parallelamente alla parete, MR, NR due tangenti che s'incontrano in un punto R del piano ora accennato, MN la corda che passa pei punti di contatto M, N; NQ sia il di lei prolungamento che incontra il piano predetto nel punto mostrato in Q, e QO sia un'altra tangente il cui punto di contatto viene indicato

in O. Si vuole dimostrare che la retta MN è l'obbiettivo di un diametro dell' ellisse prospettica, e che la prospettiva di O sarà un estremo del diametro conjugato al primo.

Infatti pel § 67 le due rette MR, NR sono in prospettiva parallele, e pel § 90 tangenti alla prospettiva della curva proposta, dunque MN darà prospetticamente un diametro (V. App. II.) Per lo stesso § 67 le prospettive delle rette MQ, OQ sono pure parallele, e per l'altro § 90 l' immagine della OQ è tangente alla curva prospettica, dunque la prospettiva di O appartiene ad un estremo del diametro conjugato a quello rappresentato obbiettivamente dalla MN (App. II).

94. *La prospettiva di un' ellisse esistente su di un piano parallelo alla parete, ha gli assi nella prospettiva degli assi obbiettivi, e proporzionali agli stessi.*

Imperocchè essendo in questo caso le linee prospettiche parallele alle obbiettive (§ 64), gli assi e le tangenti condotte agli estremi di questi daranno prospettive tra loro perpendicolari; quindi le immagini di questi assi saranno assi della ellisse prospettica (App. II). Essendo poi la curva prospettica simile all' obbiettiva (§ 87), tutte le linee corrispondenti saranno proporzionali, e così degli assi, perciò ecc.

95. *Una ellisse che sia prospettiva di un circolo esistente in un piano verticale ed inclinato alla parete, ha un diametro nella prospettiva di quel diametro del circolo che è parallelo al piano*

geometrico, ed il punto di contatto spettante ad una tangente guidata dal punto in cui il prolungamento di quest'ultimo diametro incontra una retta passante pel punto di vista parallelamente alla parete, sarà l'obbiettivo di un estremo del diametro conjugato al primo.

Lo stesso dicasi di un' ellisse obbiettiva il di cui diametro orizzontale corrisponda ad un asse.

Imperocchè avendo i diametri del circolo e gli assi di una ellisse le tangenti corrispondenti perpendicolari ad essi, queste tangenti saranno in tal caso verticali, e perciò verticali e parallele le prospettive delle medesime (§ 64, II); quindi la corda che unisce i punti di contatto delle tangenti obbiettive, debb' essere l' obbiettivo di un diametro dell' ellisse prospettica: siccome poi una tangente che abbia le condizioni dell' enunciato risulta in prospettiva parallela al diametro predetto (§ 67), il suo punto di contatto costituirà perciò un estremo del diametro conjugato al primo (App. II).

96. *Se un circolo obbiettivo ha un diametro perpendicolare alla parete, od una ellisse un asse, questi formano rispettivamente l'obbiettivo di un diametro della curva prospettica.*

Imperocchè le tangenti corrispondenti al diametro od all' asse enunciati risultano parallele alla parete, e perciò parallele anche nella prospettiva (§ 64); quindi la retta che unisce i punti di contatto prospettici debbe passare pel centro, cioè costituirne un diametro.

97. *Se ad un circolo obbiettivo, oppure ad un' ellisse, guidinsi quattro tangenti che si uniscano a due a due in un piano passante pel punto di vista parallelamente alla parete, ed i punti di contatto rispettivi si congiungano con due rette, la sezione di queste rappresenterà l' obbiettivo del centro della curva prospettica.*

Imperocchè pel § 67 le prospettive di queste tangenti risultando a due a due parallele, le rette che uniscono i punti di contatto obbiettivi, formeranno gli obbiettivi di due diametri della curva prospettica, nella cui sezione debbe cadere necessariamente il centro.

98. Finora non abbiam ragionato che del caso in cui la prospettiva di un circolo o d' una ellisse risulti ellittica, potendo per altro darsi che questa prospettiva divenga circolare, non sarà inutile l' avvertire che i ragionamenti fatti serviranno egualmente per questo caso nel processo delle operazioni grafiche, e che una tale combinazione avrà luogo, 1.° Quando le rette prospettiche corrispondenti agli assi od ai diametri conjugati risulteranno della medesima dimensione. 2.° Quando un diametro qualunque della curva prospettica, esclusi gli assi, abbia una tangente che gli corrisponde perpendicolare ad esso. Del primo caso si trova la ragione nella costruzione stessa della ellisse, (vedi App. II.), e riguardo al secondo, essendo proprietà esclusiva degli assi il fare alla circonferenza della ellisse angoli retti, la tangente non potrà mai essere perpendicolare agli altri diametri, che nel caso in cui la curva sia circolare.

99. Avressimo potuto in questo luogo terminare le teorie prospettiche delle curve, imperocchè le cose dette finora sono sufficienti a far concepire lo spirito delle operazioni grafiche, risguardanti quelle curve che s'incontrano comunemente nelle prospettive, aggiungeremo cionnullostante alcune considerazioni non del tutto inutili, intorno al caso in cui curve circolari od ellitiche possono dare prospettive simili ad esse, quantunque il piano della parete non sia parallelo al piano delle curve suddette. Questo caso nelle sezioni coniche dicesi *sezione antiparallela*.

100. Rappresenti $A\,B\,C\,D$ (Fig. VIII) un circolo od una ellisse parallela alla parete che viene indicata in $h\,g\,i\,l$, sia $a\,b\,c\,d$ la corrispondente prospettiva, la quale pel § 87 sarà simile all' obbiettiva, e mostri $E\,A\,B\,C\,D$ il cono costituito dalla serie non interrotta dei raggi visuali spettanti all'obbiettiva proposta. Immaginiamo ora segato il cono suddetto in $l\,m\,n\,o$ per modo che la di lui porzione $E\,l\,m\,n\,o$ risulti un cono retto: se essendo $l\,n$ un diametro ed f il centro della curva circolare od ellittica $l\,m\,n\,o$, si faccia passare per f e pel vertice E una retta $E\,f\,F$, che io nominerò *centrale al cono*, e di poi si volga la porzione $l\,A\,C\,n$ di superficie conica su di essa $E\,F$, in maniera che il punto l venga a cadere in n e questo vada in l, sarà facile il convincersi essere $E\,C'\,B'\,A'\,D'$ un cono avente per base la curva $A'\,B'\,C'\,D'$ ed il vertice in E. Quindi la curva $a\,b\,c\,d$ sarà prospettiva della $A'\,B'\,C'\,D'$: ma questa curva non è che la pri-

ma $ABCD$ cambiata di posizione, adunque la prospettiva $abcd$ sarà simile alla curva $A'B'C'D'$ ancorchè questa non sia parallela alla parete.

101. Dimostrata la possibilità del caso che la prospettiva di una curva non parallela alla parete rimanga simile all' obbiettiva, passeremo ora a stabilire le condizioni che debbe avere la parete rispetto al cono visuale, acciò abbia luogo la circostanza sopradetta. A questo fine immaginiamo un piano che passi per la EF e ruoti intorno ad essa. Mostrino le rette EA, AC, CE, ac le sezioni di una posizione di questo piano, col cono $EABCD$ e col piano della curva $abcd$. Siano le rette EC', $C'A'$, $A'E$ altre sezioni dello stesso piano e nella posizione medesima col cono $EA'B'C'D'$. Egli è evidente che ruotando il piano predetto sulla stessa EF intorno a cui volgemmo la porzione di cono $lACn$, sarà perciò l'angolo $EA'C'$ identico all'angolo EAC, e quindi eguale ad Eac, come pure l'angolo $EC'A'$ risulterà eguale all' altro Eca. Lo stesso accaderà, come è manifesto, in ciascun'altra posizione del piano ruotante. Quindi la sezione della parete con un cono visuale a base circolare od ellittica sarà antiparallela, *quando in esso cono, facendo ruotare un piano intorno alla retta centrale al medesimo, sempre accada, che delle due rette prodotte dalla sezione di questo piano colla superficie convessa del cono, l'una faccia colla comune sezione del piano nominato e della parete quell'angolo rivolto al vertice, eguale a quello formato dall'altra colla co-*

mune sezione del piano più volte accennato e del piano della base del cono suddetto.

102. Essendo cosa non tanto facile il verificare quando abbia luogo una tale eguaglianza di angoli, faremo note alcune altre condizioni che dalle accennate ne emergono, le quali rendono più facili le operazioni grafiche. Si produca la $C' A'$ fino ad incontrare una $E E'$ guidata da E parallelamente alla $a\,c$: avremo con ciò costrutti due triangoli $C' E E'$, $A' E E'$ simili, imperocchè abbiam dimostrato essere l'angolo $E\,c\,a$ eguale all'angolo $E\,C'\,A'$, ed essendo per costruzione $E E'$ parallela alla $a\,c$, sarà l'angolo $A' E E'$ eguale all'angolo $E\,c\,a$, e perciò $E\,C'\,A'$ eguale ad $A' E E'$; l'angolo in E' è comune, quindi anche i terzi rimanenti $E A' E'$, $C' E E'$ pure fra loro eguali, ma i triangoli simili hanno intorno agli angoli eguali i lati proporzionali, adunque

$$C' E' : E' E :: E E' : E' A',$$

cioè la retta $E E'$ sarà media proporzionale tra la $C' E'$ e la $A' E'$. Evidentemente l'analogìa suddetta si verificherà in qualunque posizione sia il piano ruotante intorno alla retta centrale $E F$.

103. Bastando due rette per determinare la situazione di un piano, egli è manifesto, che per una curva obbiettiva verificandosi in due luoghi le condizioni sopraccennate, essa curva produrrà una prospettiva antiparallela.

104. Ritornando alla prima posizione $A B C D$ della curva, si rifletta che il piano ruotante intorno alla $E F$ dovrà nel di lui movimento passare

anche pel raggio principale, nel qual caso è facile il convincersi che desso risulterà perpendicolare alla parete ed al piano della curva accennata. Ora ritengasi in tale situazione questo piano ruotante, e di poi si volga il tronco di cono $lACn$ insieme al piano stesso, egli è evidente che quando la curva $ABCD$ avrà acquistata la posizione $A' B' C' D'$, il piano ritornerà a passare pel raggio principale, donde si vede che tra le condizioni necessarie per divenire antiparallela una prospettiva, quella debb'essere che la curva obbiettiva esista su di un piano perpendicolare ad un altro che passi pel raggio principale e per la retta centrale. Ne risulta da ciò, che se in una data posizione di una ellisse o di un circolo avrà luogo questa circostanza, basterà che si verifichi per una sola posizione del piano ruotante la condizione della eguaglianza degli angoli o della media proporzionale, acciò abbia luogo la sezione antiparallela.

Quest'ultima considerazione faciliterà in alcuni casi particolari, il verificare se una curva proposta può produrre una prospettiva antiparallela, come per esempio sono quelli in cui gli obbiettivi hanno le condizioni dei §§ 91 e 92. Rappresenti infatti $A' B' C' D'$ un circolo od una ellisse obbiettiva, ed abbia in primo luogo le condizioni del § 91. Sia E il punto di vista, $h\,g\,i\,l$ la parete, e $C' A'$ il diametro o l'asse esistente nel piano verticale accennato nello stesso § 91. Egli è manifesto, che la curva obbiettiva essendo divisa da questo piano in due parti eguali e simil-

mente poste rispetto ad esso, dovrà la retta centrale $E F$ esistere nel medesimo piano verticale, quindi avrà luogo una condizione per essere antiparallela la prospettiva risultante, perciò se si produrrà il diametro predetto $C' A'$ fino alla linea di stazione, rappresentata in $E E'$, od al suo prolungamento, e se essendo E' tale punto di unione sarà $C' E' : E' E :: E E' : E' A'$, avransi tutte le condizioni necessarie per essere una prospettiva simile alla curva obbiettiva.

Con un ragionamento analogo si dimostrerà lo stesso per gli obbiettivi del § 92, cambiando la linea di stazione in una retta passante pel punto di vista parallelamente alla orizzontale, ed il piano verticale in un piano parallelo a quello geometrico.

CAPO III.

OPERAZIONI GRAFICHE PROSPETTICHE.

Come si dispongono gli elementi nelle operazioni grafiche prospettiche.

105. Fino ad ora abbiam ragionato, sempre appoggiando il nostro dire agli elementi delle operazioni prospettiche, considerati assolutamente disposti in quel modo che fu stabilito nel definirli; e ciò fu da noi fatto, onde le immaginazioni le meno esercitate facilmente concepissero le verità che conducono a'metodi grafici della prospettiva; ora che siamo giunti alla esposizione di questi metodi, converrà alterare in alcuna parte quella prima disposizione, altra adottandone, la quale non differendo dalla prima pei risultamenti, sia però conveniente più di quella alle grafiche determinazioni delle prospettive. Questa alterazione consiste nel ridurre il piano ortografico e quello della parete amendue nel piano orizzontale, e di poi, fra le varie posizioni che questi elementi così disposti possono avere l'uno rispetto all'altro, quella presceglierc (avendo per guida un giudizio che solo si acquista descrivendo prospettive per qualche tempo) che più converrà al caso particolare che si avrà per le mani.

Tra le moltiplici posizioni che possono aver l'uno rispetto all' altro gli elementi che sopradicemmo doversi ridurre in un sol piano, una e la

più semplice ne esporremo, la quale farà scala a concepire le altre che a mano a mano anderansi usando in questo capo.

I dati indispensabili al prospettico ond' egli possa accingersi alla descrizione dell' immagine di un obbiettivo qualunque, essendo, come fu detto, le lineazioni icnografiche ed ortografiche dell'obbiettivo medesimo, supporremo adunque che *V*, *X* (Fig. I) rappresentino i fogli contenenti, l'uno la icnografia e l'altro la ortografia di un obbiettivo che si vuole rappresentare prospetticamente: mostri *Z* il foglio che deve contenere la prospettiva, cioè sia *Z* la parete, la quale orizzontalmente si disporrà rispetto al foglio *V*, nel modo indicato dalla figura. Preso adunque *V* per piano geometrico, stabiliscasi in esso ove più piaccia, per esempio in E, il punto di stazione, di poi per verificare se quelle parti dell'obbiettivo che l'artista vuole restino visibili o nascoste, oppure sieno più o meno in iscorcio, lo sono realmente rispetto al punto di stazione prescelto, egli fisserà una spilla in questo punto, e con una riga, la quale sempre rimanga appoggiata alla spilla medesima, percorrerà le varie parti della icnografia. Si segni una linea IL nel luogo in cui dovrebbe insistere la parete posta che fosse nella posizione verticale, sarà IL la linea del taglio, alla quale guidando da E una perpendicolare EQ'' che attraversi tutta la parete *Z*, si avrà in EQ la linea di distanza ed in $Q'Q''$ la direttrice. Finalmente descrivendo verso il lembo inferiore della parete una retta

$I'\,L'$ parallela alla linea del taglio, segnando sulla direttrice un punto E' distante da Q', quanto sarà la lunghezza che il prospettico vorrà assegnare alla linea di stazione, e conducendo per E' una $M\,N$ parallela ad $I'\,L'$, avrassi in $I'\,L'$ la fondamentale prospettica, in E' il punto principale, in $E'\,Q'$ la linea dell' altezza ed in $M\,N$ la orizzontale.

Questa disposizione del piano geometrico di quello della parete e degli elementi contenuti in essi, evidentemente coincide con quella che ne verrebbe dall'altra mostrata in $h\,g\,i\,l$, $V\,Z\,X\,Y$, se dopo aver ridotta la parete nel piano geometrico, facendola ruotare sulla linea del taglio $i\,l$, scorrere si facesse di poi la parete medesima oltre la icnografia $B'\,A'$, osservando di mantenere in questo movimento la direttrice nel prolungamento della linea di distanza, direzione che acquisterebbe per la immaginata rotazione della parete intorno alla linea del taglio. Egli è poi chiaro, che se da un punto qualunque b' s' innalzi una normale $b'\,b$ e che dall'identico punto B' del piano V si conduca una parallela $B'\,B$ alla $Q''\,A'$, che distingueremo pure col nome di normale, le due $b'\,b$, $B'\,B$ avranno nelle rispettive pareti $h\,g\,i\,l$ e Z una posizione perfettamente simile. Se la parete Z fosse trasportata in un'altra qualunque posizione rispetto al piano geometrico V, è manifesto, che prendendo sulla fondamentale $I'\,L'$ una $B''\,Q'$ eguale a $B'\,Q$, e producendo da B'' una normale, essa avrà nella parete una posizione identica alla $B'\,B$ sopraccennata.

Venendo adunque all'atto pratico osserveremo che nelle fig. IX, X e XI ove la direttrice esiste nel prolungamento della linea di distanza, le normali si potranno innalzare a dirittura sulle projezioni prospettiche esistenti sulla linea del taglio e prolungarle nella parete, imperciocchè passeranno esse pure pei corrispondenti punti della fondamentale: rispetto poi alle altre figure, per es.° alla XII, ove la direttice è la $E'''\,q$, ed $e'q'$ è la linea di distanza, s'intenderanno sempre le projezioni testè accennate, dalla linea del taglio $f'\,o'$ trasportate sulla fondamentale prospettica $f'''\,o$, prendendole ordinatamente distanti da q, come nella $f'\,o'$ lo sono da q'. Così i punti n, m, o corrispònderanno ai punti n', m', o', perchè $q\,n$ è eguale a $q'\,n'$, $q\,m$, a $q'\,m'$ e $q\,o$ a $q'\,o'$. ecc.

Riguardo poi al piano ortografico X, (Fig. I) il cui uso, generalmente parlando, è semplicemente quello di porgere le distanze che i varj punti dell'obbiettivo hanno dal piano geometrico, egli è evidente, che qualunque sia la sua situazione darà sempre un eguale risultamento, purchè si segni nello stesso una linea $r\,v$, che rappresenti la fondamentale ortografica, cioè avente le condizioni accennate nella definizione che ne fu data nel § 31. Si è detto generalmente parlando, perchè in certi casi, la disposizione del piano ortografico può contribuire a rendere più facile l'operazione prospettica.

Qualunque siasi la collocazione del punto di stazione di quello principale e della linea del ta-

glio, si otterrà sempre dalla prospettiva un effetto conforme all'intenzione dell'artista, se colui che la osserva si colloca nel giusto punto di vista; ma altrimenti potrà accadere essendo lo spettatore fuori di un tal punto; e siccome questo il più delle volte succede a chi osserva un quadro qualunque, dovrà perciò l'operatore nella collocazione de' sopradetti elementi, non tralasciare alcuna di quelle precauzioni dettate dalla sperienza e dal buon gusto, e che saranno il soggetto del capo seguente a questo.

Determinazione grafica dei punti e delle linee di concorso.

106. Prima d'innoltrarsi nella descrizione delle regole che insegnano a tracciare speditamente i punti e le linee di concorso, a seconda delle loro particolari situazioni rispetto ai piani ortografico geometrico e della parete, premetteremo un criterio onde conoscere da qual parte della orizzontale e della direttrice cada un punto di concorso spettante ad una data retta obbiettiva.

Osserva quella parte dell'obbiettiva che prolungata s'accosta alla parete; ed in primo luogo sia la parete fra l' obbiettiva ed il punto di vista. Se il prolungamento predetto piegherà dalla tua destra sarà il punto di concorso alla sinistra della direttrice, e viceversa se il prolungamento piegherà verso la parte sinistra di te. Sarà poi superiore alla orizzontale se la linea prolungata anderà ver-

so il piano geometrico, ed inferiore nel caso opposto.

Se la parete sia oltre l' obbiettiva, il punto di concorso sarà collocato da quelle parti della orizzontale e della direttrice, verso le quali s'accosterà il prolungamento più volte accennato.

107. *Del concorso delle linee parallele al piano geometrico, od esistenti in questo, e ad angolo semiretto alla parete* (Fig. XI).

Si segni nella orizzontale *fr* il punto *r*, distante dal punto principale *e* quanto la lunghezza della linea di distanza *e' q'*; pel § 47, I e § 49, II, esso punto *r* sarà il concorso cercato. La di lui collocazione piuttosto da una parte che dall' altra della direttrice, si regolerà a seconda di ciò che fu detto nel § antecedente.

108. *Del concorso delle linee parallele al piano geometrico, od esitenti in questo, e inclinate alla parete con angolo qualunque* (Fig. XI).

Rappresenti *a' b'* la icnografia di una delle predette linee. Condotta la retta di concorso *e' f'* dell'obbiettiva corrispondente ad *a' b'*, ciò che si otterrà facendo *e' f'* parallela ad *a' b'* (§ 38), da *f'* projezione del punto di concorso ricercato (§ 39) s'innalzi la normale *f' f*: il punto *f* in cui questa normale incontra la orizzontale, sarà quello che si dimanda (§ 47, I e § 62).

109. *Del concorso delle linee inclinate con angolo semiretto al piano geometrico* (Fig. XI).

Sia *a' b'* la icnografia di una delle linee sopra enunciate. Si determinerà il punto di concorso del-

la $a' b'$ suddetta (§ antec.), e sia esso f, si prolungherà la normale $f f'$ sino che $f g$ sia uguale ad $f' e'$, e sarà g il concorso richiesto (§ 52); nel caso per altro che esso concorso debba essere inferiore alla orizzontale.

110. *Del concorso delle linee inclinate al piano geometrico, ed esistenti in un piano verticale e perpendicolare alla parete* (Fig. IX).

Rappresenti $A' B'$ la ortografia di una delle linee predette e $b' a'$ la sua icnografia. Da B' si segni la $I B'$ parallela alla fondamentale ortografica, e da A' la perpendicolare $A' I$. Si prenda sulla retta di distanza $q e'$ la parte $e' i$ eguale a $b' a'$; da i si traci la $i n$ eguale ad $A' I$ e parallela alla linea del taglio, e quindi pei due punti e', n si conduca la $e' v'$ a segare la predetta linea del taglio in v'; supposto che il criterio (§ 106) indichi che il punto richiesto debba corrispondere alla parte superiore della orizzontale, si prenda nella direttrice il punto v distante da e quanto l' intervallo $q v'$, e sarà v il concorso cercato.

Infatti immaginiamo che il piano su cui esiste l'obbiettiva, ruotando su di una retta perpendicolare alla parete, venga a prendere una situazione orizzontale; egli è evidente che dessa obbiettiva nella circostanza immaginata riterrà una inclinazione costante colla parete, e però pel § 49, I pure costante sarà la distanza del concorso dell'obbiettiva ruotante dal punto principale; ma questa distanza nella posizione orizzontale è manifestamente eguale a $v' q$, e però nella situazione

verticale esso concorso sarà sulla direttrice (§47.II), pure distante quanto l'intervallo $v' q$ da e.

111. *Del concorso di una linea inclinata alla parete con angolo semiretto, ed esistente in un piano inclinato comunque a quello geometrico e perpendicolare alla parete* (Fig. XVII).

Sia DC l'icnografia della linea, XR la linea del taglio, E il punto di stazione ecc. Si segni la retta di concorso ER e quindi la corrispondente normale rf'. Si prenda la lunghezza della linea di distanza ES, e col centro nel punto principale e si faccia l'archetto f' sulla normale accennata; l'intersecazione di questa coll'altro sarà il punto che si cerca (§49, II e § 62).

112. *Del concorso di una linea inclinata tanto alla parete che al piano geometrico con angolo qualunque* (Fig. XII.)

Rappresenti $f' o'$ la linea del taglio, $f'' o$ la fondamentale prospettica, OC quella ortografica, e' il punto di stazione, e quello principale, GB la ortografia della nominata linea, che supporremo effettuata essendo il piano ortografico parallelo all'obbiettiva, $g' b'$ la sua icnografia, ed $f' e'$ la retta di concorso. Facciasi il triangolo HFG' il quale abbia il lato HG' parallelo a GB, quello HF perpendicolare ad OC, ed FG' parallelo ad OC ed uguale ad $f' e'$, e trasportato l'intervallo HF sulla corrispondente normale rs, sotto o sopra alla orizzontale secondo viene indicato dal criterio, si avrà r od s per concorso della linea enunciata.

Infatti prendasi FG' per orizzontale ortogra-

fica oppure per una linea parallela ed essa, ed $H\ G'$ per la direzione della ortografia del raggio di concorso dell' obbjettiva (§ 58) o per una linea che gli sia parallela, essendo $F\ G'$ eguale ad $f'\ e'$ ed il piano ortografico parallelo all' obbiettiva, la perpendicolare $H\ F$ determinar debbe in $H\ G'$ l' ortografia dello stesso raggio di concorso, oppure una linea di eguale dimensione, e però $H\ F$ indicherà sempre la distanza che esister debbe tra il concorso cercato e l' orizzontale prospettica (§ 50).

113. Suppongasi ora che il piano ortografico non sia parallelo all' obbiettiva di $b'\ g'$, ma che faccia con essa $b\ g'$ un angolo eguale a $g'\ b'\ n'$, per cui risulti $G'''\ B$ l' ortografia della proposta linea. Dal punto f' si tracci la $f'\ F'$ parallela a $b'\ n'$ e da e' si ecciti la $F'\ e'$ perpendicolare ad $f'\ F'$. Si segni la $H'\ G'$ parallela a $G'''\ B$, ed $F''\ G'$ parallela ad $O\ C$ ed eguale ad $f'\ F'$, e dall' estremo F'' innalzata la $H'\ F''$ perpendicolare ad $F''\ G'$, determinerassi in $H'\ G'$ l' ortografia del raggio di concorso, oppure una linea eguale e parallela alla stessa, per cui $H'\ F''$ sarà la distanza che debbe avere il concorso in quistione dalla orizzontale prospettica, come nell' antecedente § si disse.

114. Sarà però utile il conoscere come si possa anche nella circostanza ora accennata, trovare la projezione del raggio di concorso su di un piano parallelo all'obbiettiva. Da B si segni la $I''\ B$ parallela alla fondamentale ortografica, e da G''' la $G'''\ I''$ perpendicolare alla stessa. Si prenda su $F\ G'$ la parte $I'\ G'$ uguale a $b'\ g'$, e su I' s'innalzi la $I'\ G''$

perpendicolare ad $F\,G'$ ed uguale a $G''\,I''$, ed avendo pure fatto $F\,G'$ uguale ad $f'\,e'$, s'innalzerà la $H\,F$ parallela ad $I''\,G'''$, e pei punti $G'\,G''$ si traccerà la $H\,G'$.

Se si vorrà eseguire l'operazione a dirittura sulla retta di concorso $f'\,e'$, si prenderà $i\,e'$ uguale a $b'\,g'$, e s'innalzerà su i la $i\,g''$ uguale ad $I\,G$ o $I''\,G'''$ e perpendicolare ad $f'\,e'$, come pure su f' s'innalzerà la $f'\,h'$ parallela ad $i\,g''$, e si traccierà pei punti e', g'' la $h'\,e'$. La retta $f'\,h'$ sarà evidentemente eguale ad $H\,F$ od $H'\,F''$.

Si osservi che se si segnerà su i la iy parallela alla linea del taglio ed uguale ad $i\,g''$, e pei punti y, e' si produrrà la $e'\,y'$, l'intervallo $f'\,y'$ sarà uguale ad $f'\,h'$, ed andrà con ciò ad evitarsi essa retta $f'\,h'$.

115. Finalmente accenneremo il modo di trovare il punto di concorso in quistione a dirittura sulla parete, per mezzo della projezione del relativo raggio di concorso. Dagli estremi b', g' dell'icnografia della linea, si abbassino le $b'\,z$, $g'\,x$ perpendicolari alla linea del taglio, e l'intervallo $z\,x$, si trasporti in $e\,z'$ sulla orizzontale, ed avendo tracciata la $G\,I$ come fu detto, oppure $G'''\,I''$, s'innalzerà su z' la $z'\,x'$ parallela alla direttrice ed uguale a $G\,I$. Egli è evidente che una retta tracciata pei punti x', e, sarà parallela alla projezione sulla parete dell'obbiettiva di $b'\,g'$ (supposto sempre che il criterio (§ 106) indicasse che il punto di concorso esister debba sopra l'orizzontale), e però producendo dai punti e, x' una $r\,e$ la quale seghi la nor-

male corrispondente rf'', darà in r l'estremo della projezione re del relativo raggio di concorso, che corrisponde al punto di concorso. (§§ 56, 57 e 62).

Se il criterio indicasse che il punto in discorso debba esistere sotto l'orizzontale, invece dalla $z' x'$ si traccierà la $z' x''$ operando come fu detto.

116. *Della linea di concorso di linee obbiettive non parallele, esistenti su di un piano, oppure su piani paralleli fra loro, verticali, ed inclinati comunque alla parete* (Fig. XII).

Sia $a' b'$ la projezione di uno di questi piani, che sarà pure la icnografia di tutte quelle linee che si suppongono esistere sullo stesso, e sia $f' e'$ la retta di concorso della $a' b'$ predetta; trasportato f' in f'', cioè fatta $f'' q$ eguale ad $f' q'$, e segnata la normale rs indefinita che passi per f'', sarà questa la linea di concorso cercata (§ 47 III).

117. *Della linea di concorso di una serie di rette parallele ad un piano, oppure esistenti in esso, essendo la sezione di questo piano con quello geometrico, parallela all' orizzontale* (Fig. XV e XVI).

Indichi $G'' H'' R''$ la inclinazione del piano predetto col piano geometrico, il quale viene espresso dalla fondamentale ortografica $H'' R''$. Sia E il punto di stazione, $R S$ la linea del taglio, e il punto principale, ed $y e$ l'orizzontale prospettica. Si trovi nel modo insegnato al § 110, il concorso della $G'' H''$, come di linea esistente su di un piano verticale e perpendicolare alla pare-

te; cioè sulla retta di distanza $R E$, si costruisca l'angolo $R E V$, eguale all'angolo $G'' H'' R''$, e sulla direttrice, superiormente al punto principale e, si metta l'intervallo $v e$ eguale a $V R$. Se dal punto v si farà passare la retta $f f'$ parallela all' orizzontale, essa $f f'$ sarà la linea di concorso cercata (§ 47, IV). Si è messo il punto v superiormente ad e, perchè il prolungamento delle rette obbiettive verso la parete incontra il piano geometrico, nel caso opposto il primo punto sarebbe inferiore al secondo (§ 106).

118. *Della linea di concorso di una serie di rette parallele ad un piano, oppure esistenti in esso, essendo la sezione di questo piano con quello geometrico perpendicolare alla linea del taglio* (Fig. XVI e XVII.)

Indichi ancora $G'' H'' R''$ la inclinazione del piano obbiettivo con quello geometrico, e sia E il punto di stazione, $R S$ la linea del taglio, $r s$ la fondamentale prospettica, ed e il punto principale. Col centro in H'' e raggio qualunque, si faccia l'arco $L'' M''$, uno stesso arco si faccia in $l m$ col centro in e e con un estremo nella orizzontale $l d$. Pei punti e, m facendo passare una linea $f' f$, questa sarà la cercata, ben inteso che la inclinazione di una tal linea piuttosto da una parte che dall'altra, debba corrispondere a quella del piano obbiettivo col geometrico. In tale esempio essendo $H'' R''$ parallela ad $s r$, sarà $f f'$ pure parallela ad $H'' G''$, quindi rendesi in tal caso inutile l'arco $l m$, poichè si avrà immediatamente la linea

di concorso, facendo ff' parallela ad $H'' G''$ e passante pel punto principale e (§ 47, V).

119. *Della linea di concorso di una serie di rette parallele ad un piano, oppure esistenti in esso, il quale sia inclinato comunque al piano geometrico ed alla parete* (Fig. XVIII).

Rappresenti la indefinita MA la ortografia del piano (g), $i'x'$ la linea del taglio, IY la fondamentale ortografica, $z'y'$ la quarta parte della linea di distanza (h), iy la fondamentale prospettica ecc. Onde stabilire le idee immagineremo che le due rette, $i'x'$, IY sieno poste nella sua vera posizione, cioè che facciano tra loro un angolo eguale a quello che farebbero la parete ed il piano ortografico, nella supposizione che insistessero verticalmente sulla corrispondente fra le rette ora dette. Ciò posto si tracci una $b's''$ parallela alla $i'x'$, e gli estremi b', s'' s'innalzino verticalmente sulla MA in B, S. Da S si tracci la SS' parallela ad IY, da B si segni la BB'' pure parallela ad IY ma eguale a $b's''$, dall'estremo B'' si abbassi una $B''S'$ perpendicolare a BB'', la quale seghi in S' la SS', e congiungansi i due punti B, S con una retta. Evidentemente la BS' ora detta sarà la projezione dell'obbiettiva di $b's''$ su di un piano parallelo alla stessa, e però la inclinazione della BS' rispetto alla IY, indicherà quella dell'obbiettiva ora detta col piano geometrico. Trovato adunque il concorso di una qualunque retta esistente sul piano obbiettivo con uno dei metodi insegnati, per esempio, di una $b'a'$ parallela ad IY,

sia questo x, per questo condotta la indefinita $v\,v'$ parallela a $B\,S'$ sarà quella che si cerca (§48).

120. Bastando due punti per segnare una retta, si potrà pure tracciare la linea di concorso di cui si discorre, trovando i punti di concorso di due rette non parallele esistenti nel piano obbiettivo, e per questi punti condurre la linea ora nominata.

121. Si concepirà facilmente, che le linee di concorso possono riescire vantaggiose ne' soli casi che l'obbiettivo contenga più linee non parallele tra loro, ma però parallele ad un dato piano, come, per esempio, se l'obbiettivo fosse un prisma esagonale ottagonale ecc. e che tanto maggiore sarà il loro pregio quanto più saranno i concorsi delle rette accennate, utili alle operazioni grafiche.

Determinazione grafica dei punti e delle linee d'incontro.

122. *Del punto d'incontro di una retta inclinata comunque alla parete ma parallela al piano geometrico* (Fig. XI).

Rappresenti $a'\,b'$ la icnografica di detta linea. Si prolunghi la stessa fino alla linea del taglio, ed essendo o il punto in cui quella incontra questa, si innalzi su esso o la normale $o\,p$. Se la linea obbiettiva giace sul piano geometrico sarà o' il suo punto d'incontro, se sia superiore ad esso piano, prendendo $o'p$ eguale alla distanza della obbiettiva dal piano geometrico, avrassi in p il

punto d'incontro, e finalmente se inferiore, $o'p$ si prenderà in senso opposto (§ 60).

123. *Del punto d'incontro di una linea inclinata al piano geometrico* (Fig. XII).

Sia GB la ortografia della enunciata linea, fatta su di un piano parallelo all'obbiettiva, sia $b'g'$ la sua icnografia, OC la fondamentale ortografica ec. Essendo o' il punto d'unione della icnografia colla linea del taglio, si trasporti $q'o'$ in qo e s'innalzi la normale $\wp o$. Si abbassi da B una BC perpendicolare a CO, facciasi OC eguale a $b'o'$ e si innalzi su O una VO parallela a BC; evidentemente sarà OV la ortografia della linea d'incontro di un piano verticale passante per l'obbiettiva, mentre $\wp o$ sarà la stessa linea d'incontro nel suo luogo sulla parete, prolungando adunque GB ad incontrare la prima in V, si prenderà $\wp o$ uguale a VO e $\wp$ sarà il punto d'incontro cercato (§ 60). Supposto in AG la ortografia di una linea obbiettiva la di cui icnografia formasse una retta con quella della BG, prolungando la prima in R e trasportando RO in $r'o$, sarà r' l'incontro della AG.

Se la linea obbiettiva fosse projettata su di un piano non parallelo ad essa, ma facesse angolo collo stesso, per esempio, un angolo eguale ad $a'b'n'$, s'eccitera da a' la $o''a'$ perpendicolare a bn, e si prenderà invece di OC eguale a $b'o$, $O'C$ eguale a $b'o''$, ed innalzata $O'V'$ parallela a BC si prolungherà l'ortografia BG''' sino a V', ecc.

124. *Avendosi due rette obbiettive fra loro parallele ed esistenti in un medesimo piano verticale, dato il punto d' incontro di una di esse, si vuole determinare quello dell' altra* (Fig. XV e XVI).

Sieno le $D'' A''$, $H'' G''$ le ortografie di due linee che abbiano le condizioni dell'enunciato, e sia indicato in p' l'incontro dell'obbiettiva di $H'' G''$; si seghino le ortografie suddette dalla verticale $C'' Q''$, e su p' s' innalzi la normale $p' o'$ eguale alla $C'' Q''$ predetta, ed o' sarà l' incontro dell' obbiettiva di $D'' A''$ (§ 61).

125. *Determinare la linea d' incontro di un piano verticale comunque inclinato alla parete* (Fig. XI).

Sia $a' b'$ la icnografia del piano obbiettivo. Si prolunghi la stessa sino alla linea del taglio in o, su o si innalzi la normale $o p$, ed essendo o' il punto d' incontro della icnografia $a' b'$, sarà $p o'$ la linea d' incontro cercata (§ 59, I).

126 *Determinare la linea d' incontro di un piano parallelo a quello geometrico* (Fig. XIII).

Si segni la linea indefinita $m' f'$ parallela alla fondamentale $m f$, e distante da essa quanto si suppone discosto il piano obbiettivo dal geometrico, sarà $m' f'$ la linea d' incontro desiderata.

Essendo cosa troppo chiara, che la linea d' incontro di un piano debba passare per un punto d' incontro di una retta esistente su di esso, così la sua situazione si rileva dal § 60, e la sua direzione dal § 59.

127. *Determinare la linea d' incontro di un piano inclinato a quello geometrico, e la cui comune sezione con questo sia parallela alla linea del taglio* (Fig. XV, XVI).

Rappresenti l'angolo $G'' H' R''$ l'inclinazione del suindicato piano, e sia la sezione del piano obbiettivo col geometrico espresso dalla retta HH'. Si prolunghi il lato $H'' R''$, su di esso si prenda la parte $S'' H''$ eguale alla distanza della $H H'$ dalla linea del taglio SR, e da S'' si abbassi la $S'' P''$ ad incontrare il prolungamento $P'' H''$ dell' altro lato $H'' G''$. Si segni sotto la fondamentale prospettica rs una sp' eguale ad $S'' P''$, e per p' si faccia passare parallelamente ad rs una pp', che sarà la linea d' incontro cercata (§ 59, II e § 60).

128. *Determinare la linea d' incontro di un piano inclinato al piano geometrico, ed avente la di lui comune sezione con questo, perpendicolare alla linea del taglio* (Fig. XVI e XVII). Sia ancora la inclinazione del piano enunciato eguale all' angolo $G'' H'' R''$, e sia la sezione col piano geometrico rappresentata dalla $H H'$. Si prolunghi questa sino alla linea del taglio in Q, e questo punto si trasporti in q sulla fondamentale prospettica. Si faccia col centro in H'' e raggio arbitrario l' arco $L'' M''$, e col centro in q descrivasi un arco $l' m'$ eguale al primo. La linea che passerà pei punti q, l sarà la cercata (§ 59, III).

129. *Determinare la linea d' incontro di un piano obbiettivo, inclinato comunque al piano geometrico ed alla parete.*

Si trovi come nel § 119 su di un piano parallelo alla parete, o sulla parete stessa, la projezione di una retta pure parallela alla parete ed esistente nel piano obbiettivo, che è quanto dire, si determini la inclinazione che questa retta ha col piano geometrico, e trovato il punto d'incontro di un' altra retta esistente sul piano obbiettivo ora menzionato, si tracci per questo una linea facciente colla fondamentale prospettica l'angolo che la retta parallela alla parete fa col piano geometrico, la quale sarà la linea d'incontro che si cerca (§ 59, IV).

Si potrà pure determinare la linea d'incontro in quistione, trovando i punti d'incontro di due rette esistenti nel piano obbiettivo, e tracciandola per questi.

130. *Data la linea d'incontro di un piano obbiettivo inclinato comunque al piano geometrico, determinare quella di un altro piano obbiettivo parallelo al primo* (Fig. XVIII.)

Indichino le rette *B A, H G,* le ortografie di due piani paralleli, e sia la linea d'incontro del superiore indicata dalla *m n*. Si seghino le rette ortografiche dalla verticale *B B'*, e la linea d'incontro del piano inferiore sarà la *q p* parallela alla *m n*, e distante verticalmente dalla stessa di quanto è la lunghezza della *B B'*. Si deduce dal § 61.

Determinazione grafica della prospettiva di un punto

131. In due modi può determinarsi la prospettiva di un punto, cioè, o col conoscere le direzioni prospettiche di due rette obbiettive che passino per esso, imperocchè la prospettiva ricercata sarà evidentemente nel luogo ove s' intersecheranno le due direzioni testè menzionate, o col rinvenire la distanza che la prospettiva del punto di cui si parla ha dalla orizzontale e dalla direttrice.

Pel primo caso se immagineremo che le rette passanti pel punto proposto sieno inclinate alla parete, oppure verticali, potrà sempre ottenersi detta direzione. In fatti per le prime a tal uopo basteranno i punti d'incontro e di concorso (§ 63), e per le seconde, la direzione prospettica suddetta sarà la normale insistente sulla projezione del punto prospettico ricercato (§ 64, II). Di queste linee, quelle delle quali riesce più facile il determinare la direzione prospettica sono le perpendicolari alla parete e le verticali, perciò saranno da preferirsi alle altre nella operazione di cui si tratta: ma se il punto obbiettivo cadrà in un piano passante pel raggio principale e per la linea di stazione, le direzioni prospettiche di tali rette riescendo verticali ambedue, non potrà più ottenersi la intersecazione che deve indicare la prospettiva del punto in quistione, perciò sarà necessario in questo caso, sostituire alla retta perpendicolare alla parete un' altra retta inclinata ad essa, la

quale, per rendere più semplice l'operazione, si prenderà parallela al piano geometrico.

132. E primieramente esista il punto fuori del piano passante pel raggio principale e per la linea di stazione, e sia a' (Fig X) la sua icnografia. S'innalzi su a' la normale $a'p$ e su questa si prenda un punto p lontano dalla fondamentale prospettica, quanto è la distanza del punto obbiettivo dal piano geometrico, e si segni la pa concorrente nel punto principale e; questa sarà la direzione prospettica di una retta passante pel punto obbiettivo e perpendicolare alla parete (§§ 51, 60 e 63). Si segni pure la linea visuale $a'e'$ spettante al punto proposto, e sulla intersecazione m di questa colla qo s'innalzi la normale ma, la quale ma indicherà la direzione prospettica di una retta verticale passante pel punto obbiettivo (§§ 62 e 64, II). Questa segando la ap in a, darà in quest'ultimo punto la prospettiva dell'obbiettivo di a'.

133. Esista in secondo luogo il punto obbiettivo nel piano verticale passante pel raggio principale; sarà evidentemente la di lui icnografia s'' nel prolungamento della linea di distanza: si tracci la $s''r'$ in quella inclinazione che tornerà più comoda, e sia f' il di lei concorso; se su r s'innalzi la normale rx, e su di essa si prenda il punto x avente le condizioni di p del caso antecedente, e si conduca per x ed f la xf, la intersecazione di questa colla direttrice darà in s la prospettiva ricercata.

134. Egli è poi evidente che se i punti obbiettivi accennati esistessero sul piano geometrico, cadrebbero allora i punti d'incontro corrispondenti r', o' nella fondamentale, e però facendo con questi la operazione che si fece coi punti x, p, si avrebbe c per prospettiva del punto nel primo caso, ed s' pel secondo.

135. Veniamo ora al modo di determinare la prospettiva del punto in quistione rinvenendo la distanza di essa prospettiva dalla orizzontale e dalla direttrice. Rappresenti A l'ortografia del punto proposto, $C\,D$ la fondamentale ortografica, $L\,X$ la corrispondente orizzontale, ed a'' (Fig. X) la icnografia dello stesso punto. Conducasi per questa una $a''\,l$ parallela alla linea del taglio, su di essa si prenda una $l\,a''$ eguale ad $L\,A$, e congiungasi il punto di stazione e' coi due l, a'' per mezzo delle $l\,e'$, $a''\,e'$; finalmente dal punto h si guidi la normale $h\,a'''$, e dal punto i in cui detta $a'''\,h$ sega la orizzontale, si segni l'intervallo $i\,a'''$ eguale a $g\,h$: sarà a''' la prospettiva del punto in quistione.

Avvertasi che il punto a''' si è segnato nella $a'''\,h$ superiormente alla orizzontale, perchè l'ortografia A del punto obbiettivo è superiore alla $L\,X$, nel caso opposto risulterebbe a''' inferiore ad i. Si concepirà facilmente che per ogni punto che giaccia sul piano geometrico sarà la $l\,a''$ eguale alla linea dell'altezza.

Infatti, riguardo alla distanza dalla direttrice del punto prospettico di cui si ragiona egli è evidente che soddisfa la normale $a'''\,h$. Riguardo poi

alla distanza dello stesso punto prospettico dalla orizzontale, immaginiamo innalzato verticalmente il triangolo $l\,a''\,e'$ e la $g\,h$ fino che giacciano su di un piano passante pel punto di vista e per la orizzontale, supponendo però che la parete sia rispetto al piano geometrico, nella situazione che gli fu data nel definirla. Immaginiamo quindi che la retta $l\,a''$ ruotando sull'estremo l, descriva coll'altro a'' un circolo parallelo alla parete; pel § 87 la di lui prospettiva sarà essa pure un circolo; ma il raggio del circolo obbiettivo è la $l\,a''$ la quale viene rappresentata prospetticamente dalla $g\,h$; ora questa $g\,h$ nell'innalzamento immaginato esister debbe sulla orizzontale, e però posta nella situazione verticale nel modo che dicemmo, rappresentar debbe la distanza prospettica del punto dalla orizzontale medesima.

Gioverà riflettere che le rette $l\,a''$, $g\,h$, daranno sempre un eguale risultamento qualunque sia la loro inclinazione, purchè la $l\,a''$ sia eguale alla $L\,A$ e la $g\,h$ parallela alla prima, e che ambedue partano dai punti a'', l ed incontrino una retta passante pel punto di stazione. Quest'avvertenza potrà tornare utile alla pratica, quando nel piano icnografico esista una linea che possa suplire alla $l\,e'$. Infatti sia $l'\,e'$ una retta la quale passi distante da a'', meno dell'intervallo $A\,L$, se si prenderà col compasso la dimensione $A\,L$, e col centro in a'' si farà l'archetto l' sulla $l'\,e'$, e quindi si guiderà da h una $h\,g'$ parallela a quella che si suppone unire i due punti l', a'', sarà

evidentemente $g' h$ eguale a $g h$, e perciò facendo $a''' i$ eguale a $g' h$, sarà a''' come nel primo caso la prospettiva richiesta.

Della prospettiva di alcune superficie piane rettilinee, e di alcuni solidi a facce piane

Le superficie ed i solidi in situazione verticale, s'intenderanno sempre avere un lato od una faccia nel piano geometrico.

136. *Di una superficie rettangolare, perpendicolare al piano geometrico ed alla parete* (Figura IX).

Sia $A\,B\,D\,C$ la ortografia di detta superficie, ed $a'\,b'$ la icnografia. Su questa s'innalzi la normale $p\,o'$ eguale ad $A\,C$, la quale sarà la corrispondente linea d'incontro (§ 59, I). Si conducano dai punti p, o' due rette concorrenti in e punto principale, e tracciate le rette visuali $a'\,e'$, $b'\,e'$, sulle projezioni prospettiche m, n si segnino le normali $b\,m$, $a\,n$, e sarà determinata in $b\,a\,c\,d$ la prospettiva di cui si ragiona.

137. *Di una superficie rettangolare, verticale, ed inclinata alla parete con angolo qualunque* (Fig. XI).

Sia la sua icnografia $a'\,b'$ e la ortografia $ABCD$. Sostituendo al punto principale della antecedente dimostrazione, il punto di concorso de' lati orizzontali indicato da f, sarà la operazione in tutto eguale all' altra, ben inteso che la linea d' incontro $p\,o'$, insista sulla corrispondente projezione o.

138. *Di una superficie rettangolare, parallela alla parete* (Fig. X).

Mostri $a' b'$ la icnografia ed $ABCD$ la ortografia della data superficie. Si traccino primieramente le rette visuali $b' e'$, $a' e'$, e sulle projezioni prospettiche n, m, come pure su di un suo estremo a', s'innalzino le normali bn, am, po', e si faccia po' eguale a BD. Dopo questo si segnino le ap, co' concorrenti in e, e dai punti a, c, ove queste intersecano la am, si segnino le ab, dc parallele alla orizzontale, le quali nel loro incontro colla bn determineranno in $bacd$ la prospettiva richiesta.

139. *Di una supirficie pentagona, avente un lato nel piano geometrico, due verticali, e due inclinati al piano geometrico predetto con angolo uguale* (Fig. XII).

Sia $AGBCD$ l' ortografia dell' enunciata superficie, e ne mostri $b' a'$ l' icnografia. S' incominci col determinare la prospettiva del rettangolo corrispondente ad $ABCD$, come nel § 137. Ciò fatto ritrovisi il punto di concorso di uno dei lati inclinati al piano geometrico, per esempio, di GB (§ 112), e sia questo concorso s. Si segni quindi il concorso r dell' altro lato GA, il quale otterrassi facendo fr eguale ad fs (§ 54), e per ultimo nelle direzioni ra, sb, si tirino le due ga, gb, dalle quali sarà compita la prospettiva che si dimanda.

Si riconoscerà facilmente esser questa figura il perimetro della facciata di un edifizio con frontispizio.

140. *Di un parallepipedo rettangolare posto verticalmente, e diviso in filari orizzontali* (Figura XIII).

Sia *A B D C* la icnografia del solido, *X V* la di lui altezza, *M V* la linea del taglio, *mf* la fondamentale prospettica, *e* il punto principale, *H N* la quarta parte della linea di distanza, *l l'* la linea d'incontro della faccia projettata in *A C*, *s* il corrispondente concorso ecc. Si ritrovi con questi dati la prospettiva *c a o p* della faccia ora detta, ed appoggiandosi ai punti *c*, *p*, ed al concorso spettante all' altra faccia visibile, si tracceranno le *c d*, *rp*, ed avendo segnata pure la *r d* mediante la normale innalzata sulla corrispondente projezione prospettica, si avrà costrutta la prospettiva delle due facce che possono essere vedute da chi trovasi collocato nel punto di vista.

Per tracciare le divisioni dei filari, si osservi che le XX', $X'X''$ ecc. rappresentano le distanze fra le divisioni dei filari suddetti. Si segnino nella linea d' incontro l', l già accennata e che è eguale ad *X V*, i punti x', x'' ecc. come lo sono gli X', X'' ecc. nella *X V*, saranno detti x', x'' ecc. i punti d'incontro delle divisioni sopradette (§ 61), e perciò spartita la faccia *c p o a* con linee che abbiano le direzioni $x's$, $x''s$ ecc., queste daranno l' immagine delle divisioni più volte menzionate. Per l' altra faccia serviranno i punti z', z'' ecc. ed il concorso spettante alla faccia *d c p r*.

141. *Di una piramide a base quadrata, poggiata sul piano geometrico e composta di filari orizzontali* (Fig. XIV).

Ne mostri $A\ B\ D\ C\ M$ l'icnografia, $M'D'C'$ l'ortografia, $x\,X$ la linea del taglio, rx la fondamentale prospettica, $H\,N$ la quarta parte della linea di distanza ecc. Per evitare il punto d'incontro del lato $B\,A$ che cade soverchiamente lontano, si tracci la diagonale $A\,D$, ed i punti d'incontro G, F, X di questa e dei lati $B\,D$, $A\,C$ meno divergenti colla $x\,X$, si trasportano in g, f, x. Coi punti f, x, ed il corrispondente concorso s si segnino le direzioni prospettiche bf, $a\,x$, e col punto g ed il rispettivo concorso l la direzione prospettica $g\,l$ della diagonale sopradetta. Quest'ultima direzione taglierà le due prime ne' punti a, d che saranno evidentemente le prospettive degli obbiettivi A, D, quindi trovato il concorso dei lati $B\,A$, $D\,C$, avrassi in questo punto e nei due a, d, i dati necessarj per compiere la prospettiva $abdc$ della base della piramide.

Dalla icnografia M del vertice di essa piramide si conduca una $M\,O$ parallela a $B\,D$, e la si consideri come icnografia di una retta parallela al piano geometrico passante pel vertice della piramide, e di questa supposta retta si ritrovi il punto d'incontro (§ 122) il quale sia p, la sp sarà la direzione prospettica della retta immaginata; si ritrovi pure la direzione prospettica di una verticale passante anch' essa pel vertice della piramide, o per mezzo della projezione prospettica del vertice medesimo, oppure innalzandola sulla intersecazione m delle rette $a\,d$, $b\,c$ che uniscono diagonalmente gli angoli della base, ed avrassi

nell' unione m' della retta ora detta colla sp, la prospettiva del vertice accennato (§ 131), e però condotte le $m'b$, $m'd$, $m'c$ ed anche la $m'a$ se vogliasi, avrassi così l' immagine della sola parte visibile, oppure la prospettiva dell' intiera piramide considerata come diafana.

Rimangono ora da determinarsi le linee che dividono i filari, per le quali osserveremo che congiunto il punto p con f, incontro della $b\,d$, sarà $p\,f$ la linea d' incontro della faccia della piramide di cui $m'bd$ è prospettiva, imperocchè p ed f sono evidentemente i punti d' incontro di due rette esistenti in un medesimo piano colla faccia sumenzionata (§ 129), quindi i punti d' incontro delle suddette divisioni dei filari esisteranno nella $p\,f$, e la divideranno in parti eguali se i filari saranno egualmente grossi, od in parti proporzionali alle distanze successive $M'\,M''$, $M''\,M'''$ ecc. delle loro ortografie, se fossero di varie grossezze, nel qual caso col centro in M' e coll'intervallo fp, descritto l'archetto Z tagliante la fondamentale ZC', uniti i punti M', Z, protratte le ortografie delle divisioni dei filari a segare la $M'\,Z$, e divisa la fp nei punti z', z'' ecc. come la $M'\,Z$ lo risulterà in Z', Z'' ecc. saranno evidentemente i predetti z', z'' ecc. i punti d' incontro delle divisioni dei filari, e perciò le prospettive di esse divisioni si otterranno spartendo la faccia $m'\,b\,d$ con delle rette tracciate nelle direzioni $z's$, $z''s$ ecc. Le divisioni che accaderanno sullo spigolo $m'd$, ed il concorso della $d\,c$, serviranno poi di norma pei filari della faccia $m'\,d\,c$.

142. *Di un prisma retto a base ottagona, appoggiato al piano geometrico con uno spigolo parallelo alla parete* (Fig. XV, XVI).

Sia *A C D X* ecc. l'icnografia, *S R* la linea del taglio, $D'' A'' G'' H''$ l'ortografia, effettuata su di un piano perpendicolare alla parete, $S'' R''$ la fondamentale ortografica, *r s* quella prospettica ecc. Si ritrovi l'incontro di uno dei lati, e meglio sarà di quello corrispondente a *B C*, che essendo parallelo al piano ortografico, il di lui incontro si otterrà più speditamente, come fu accennato nel § 123. Sia c' questo punto d'incontro, si conduca per esso, parallelamente alla *rs*, una $y' b'$, nella quale avrassi la linea d'incontro della superficie obbiettiva (§ 127). Su di essa esisteranno i punti d'incontro de' lati projettati in *Z Y*, *Y X*, *X U*, *D C*, *B A*, ed è evidente che dovranno essere disposti rispetto al punto c', come le projezioni corrispondenti lo sono riguardo a C'. Osserveremo che segnati i tre incontri u', d', b', gli altri due otterransi facendoli eguali rispettivamente alle $d' c'$, $c' b'$.

Passiamo ora a determinare i tre punti di concorso spettanti ciascuno a due de' sei lati di cui abbiam ragionato. A questo fine si ritrovi la linea di concorso della proposta superficie (§ 117), e su di essa segnando due punti f, f' distanti ciascuno da v quanto la projezione del punto di concorso spettante al lato corrispondente ad *X U* lo è da *R*, saranno f, f' rispettivamente i punti di concorso dei lati projettati in *X U*, *A B*; *Y Z*,

CD (§§ 55 e 62). Le cose essendo a questo punto, si conduranno le direzioni prospettiche dei sei lati detti di sopra. Per avere le prospettive de' due rimanenti lati, i quali per esser paralleli alla parete sono privi di concorso e d' incontro, si determineranno nel modo noto le projezioni delle prospettive de' punti corrispondenti ad A, D, ed innalzate le rispettive normali, dai punti d, a di esse, che sono comuni alle direzioni prospettiche ba, dc, si ecciteranno parallelamente alla rs (§ 64, I) due du, az, dalle quali sarà compita la prospettiva della faccia superiore.

Ritrovata con questo processo la faccia ora detta del prisma, si determini il concorso dei lati projettati in $HU, H'D, TC$ ecc. (§ 112), e si conducano le direzioni prospettiche xx'', uu'', dd'' ecc. dei medesimi; di poi si segni il punto d'incontro c''' del lato la cui ortografia è $T''K''$, servendosi di un' operazione analoga a quella insegnata nel § 124, il quale punto, col concorso v, somministrerà la direzione prospettica $c'''b''$ del lato suddetto; e finalmente nella direzione $c''f'$ si tiri la $d''c''$; dal punto d'' si ecciti una parallela $u''d''$ alla ud, e da u'' nella direzione $u''f$ si conduca una $u''x''$, che così sarà compita la prospettiva della parte visibile del solido proposto.

143. *Di un prisma retto a base ottagona, appoggiato al piano geometrico con uno spigolo il quale sia perpendicolare alla linea del taglio* (Fig. XVI e XVII).

Ne mostri $ACUY$ ecc. l'icnografia, RS la linea del taglio, $D''A''G''H''$ l'ortografia effettuata su di un piano parallelo alla parete. Sia $S''R''$ la fondamentale ortografica, rs quella prospettica ecc. Si determini primieramente il punto d'incontro a' dall' obbiettiva di ZA (§ 122), e per esso si conduca la $a'u'$, come linea d'incontro della proposta; cioè la si tracci parallela alla $D''A''$ nel caso che, come nella presente figura, la fondamentale ortografica sia parallela a quella prospettica, oppure che faccia con quest'ultima l'angolo che la $D''A''$ fa colla $S''R''$ (§ 128). Si segnino sulla rs le projezioni dei punti d' incontro dei lati corrispondenti ad YZ, AB, CD, DU, UX, e le normali relative daranno nelle sezioni di esse colla $u'a'$, i punti d' incontro dei lati sopradetti. Si osservi che gl'incontri corrispondenti alle XU, DC avranno, rispetto all' incontro spettante ad UD che è d, una disposizione simmetrica ed uguale a quella degli incontri corrispondenti ad YZ, AB rispetto ad a'.

Riguardo ai tre concorsi spettanti ciascuno a due de' sei lati di cui si è ragionato, si osservi che le obbiettive di UD, ZA, avranno il loro concorso nel punto principale, e che perciò la ff', eccitata da e parallelamente alla $u'a'$, sarà la linea di concorso della superficie obbiettiva (§ 59), innoltre essendo detta superficie perpendicolare alla parete, e le obbiettive delle $YZ, DC; XU, AB$, risultando a due a due in senso opposto inclinate con angolo semiretto alla parete suddetta,

adunque non solo queste obbiettive avranno i loro concorsi equidistanti dal punto principale, ma di più lontani da esso punto quanto è la lunghezza del raggio principale (§ 49, II) e perciò poste ef, ef' eguali ciascuna ad SE, saranno f, f' i punti di concorso dei lati in quistione. Il restante della operazione si eseguirà come nel § precedente, osservando per altro che le prospettive dei lati paralleli alla parete, debbono esser guidate parallelamente alla linea d' incontro $u'a'$ (§ 64).

Ottenuta in questa guisa la prospettiva della faccia superiore del prisma, si conducano da u, d, c, b, a tante perpendicolari alla $u'a'$; saranno queste le direzioni prospettiche dei lati projettati in $A''G''$, $B''K''$ ecc. (Ciò risulterà manifesto, riflettendo che ciascuna delle direzioni prospettiche sopradette deve essere inclinata alla fondamentale con un angolo eguale a $D''H''S''$ (§ 64, III), e che la inclinazione della $u'a'$ alla rs è uguale a quella della $D''A''$ alla $S''R''$ (§ 59, III)). Si ritrovi il punto d'incontro q del lato corrispondente ad HH', il quale si otterrà immediatamente, facendo sq uguale ad SQ (§ 122), e si compisca l' operazione come nel § antecedente, osservando che la $c''b''$ debb' essere condotta parallelamente alla cb.

144. *Di un cubo appoggiato al piano geometrico con uno spigolo il quale sia inclinato alla linea del taglio* (Fig. XVIII).

Rappresenti $f'a'c'h'$ ecc. l' icnografia, $i'u''$ la linea del taglio, $z'y'$ la quarta parte della linea di distanza, $BAGH$ l' ortografia la quale si ri-

ritiene effettuata considerando il piano ortografico parallelo alle obbiettive di $f' b', b' a'$, e disposto in quella posizione che acquisterebbe riducendolo sul piano geometrico con una rotazione intorno alla fondamentale ortografica indicata in IY, per la qual cosa sarà essa IY parallela alle $b' a', f' l$, ed i punti A, B, H, G esisteranno ne' prolungamenti delle rispettive $f' h', b' d'$, ecc. mostri la indefinita iy la fondamentale prospettica ecc. Si ritrovino i punti $M, N; Q, P$ nel modo indicato nella figura, le quali saranno le ortografie dei punti d'incontro delle rette rappresentate in $f' l'$, $b' a'; h' g', d' c'$. Questi punti si trasportano sulla parete nel modo noto, e sieno questi indicati in $m, n; q, p$. Si ritrovi pure il concorso x dei lati ora detti e si traccino le corrispondenti direzioni prospettiche nc, ma, ecc. innalzando poi sulle projezioni prospettiche degli otto angoli del solido le solite normali a segare le corrispondenti direzioni sopradette, si avranno le prospettive degli stessi angoli, e per conseguenza i dati onde tracciare le prospettive degli altri spigoli che compiono quella richiesta, come è facile il comprendere.

145. *Della prospettiva di una scala a due rami posti ad angolo retto* (Fig. XIX).

Rappresenti X l'icnografia della scala predetta, X' l'ortografia, dh la linea del taglio, $d'h'$ la fondamentale prospettica, e il punto principale ecc. Il punto di stazione esiste nel prolungamento della yy' e distante da y quattro volte l'intervallo YZ. Si osservi che la yy' rappresenta pu-

re la direttrice. Si ritrovino come nella figura i punti *a, b, c, d,* e si trasportino sulla *d' h'* ordinatamente distanti da *y'* come i predetti lo sono da *y*. Su questi punti s'innalzino le solite normali, delle quali la *d' d''* alta otto gradini, la *c' c''* cinque, la *a' a''* quattro, e la *b' b''* uno. Fra le normali *b' b''*, *a' a''* e le altre *d' d''*, *c' c''*, facciasi la projezione della sezione del corrispondente ramo della scala, come sarebbe quella fatta da un piano parallelo alla parete, in modo agevole a comprendersi osservando la figura stessa. Evidentemente in questa guisa noi avremo segnate le linee d' incontro dei piani orizzontali e verticali dei gradi dei due rami della scala, non che i punti d'incontro degli spigoli salienti e rientranti dei medesimi. Si osservi che trasportando i punti *h, g* in *h', g'* come dicemmo dei primi, innalzate le normnali *h' h''*, *g' g''*, dividendo la metà superiore della *h' h''* e la *g' g''* in quattro parti, prolungando la *a' a''* sino ad uguagliare la *h'' h'*, e dividendo questo prolungamento e la *c' c''* in cinque, avransi pure i punti d'incontro de' spigoli orizzontali laterali dei medesimi gradi, per cui con questi dati e coi punti di concorso rispettivi, si potrebbe segnare la prospettiva dell'intiera scala, come è facile a concepirsi nell'ispezione della figura stessa, ma gli spigoli verticali è sempre miglior consiglio il segnarli per mezzo di normali, nel qual caso sono sempre sufficienti allo scopo di cui si tratta, o le sole linee e punti d'incontro detti superiormente, od i soli punti d' incontro orora accennati.

146. *Determinare la prospettiva di un piedistallo quadrangolare con gradinata, appoggiandosi ad una sol linea d'incontro* (Fig. XX).

Rappresenti $P\ A\ B$ ecc. l'icnografia dell'obbiettivo proposto, V la di lui ortografia, $C\ D$ la linea del taglio, $c\,d$ la fondamentale ecc. Si ritengano protratti i piani verticali ed orizzontali dei gradi nell' interno dei cubi ai quali si appoggiano i gradi medesimi; per questa supposizione gli spigoli orizzontali del solido, potranno considerarsi come lati di piani quadrati orizzontali, centralmente disposti in una stessa verticale. Immaginiamo un piano verticale che seghi diagonalmente l'obbiettivo, sia $A\ B$ la projezione di esso piano su quello geometrico, e $q\,q'$ la di lui linea d'incontro (§ 125), evidentemente i punti q, g, l, ecc. distanti dalla $c\,d$, ordinatamente come le ortografie degli spigoli orizzontali lo sono dalla fondamentale ortografica, saranno i punti d'incontro delle comuni sezioni del piano verticale immaginato coi piani quadrati che sopra dicemmo, cioè a dire gli incontri delle diagonali di questi. Il concorso delle diagonali accennate sarà r, che mostra il concorso della $A\,B$. Ciò premesso si conduce la $q\,r$ indefinita dalla parte di q, e sulla projezione prospettica del punto obbiettivo corrispondente ad f', F, si innalzi una normale; la comune sezione di questa normale colla $r\,q$ predetta sarà la prospettiva del punto obbiettivo testè menzionato (§ 131). Si tracci $r\,g$, e nella di lei intersezione i colla normale che ha

determinato il punto f, avrassi la prospettiva del punto obbiettivo projettato in i', F. Progredendo allo stesso modo, si otterranno le prospettive dei punti corrispondenti successivamente alle projezioni $h', H; m', H; n', N$ ecc. Determinate che sieno le prospettive di questi punti, si ritrovino i concorsi pertinenti agli spigoli orizzontali dell' obbiettivo, cioè a dire i concorsi spettanti alle PA, BP, ed appoggiandosi a questi concorsi ed ai punti f, i, h, m, n, b ecc., si segnino le direzioni prospettiche degli spigoli orizzontali delle facce visibili. Delle normali innalzate nel modo usato sulle projezioni prospettiche degli opportuni punti obbiettivi, daranno, e le immagini degli spigoli verticali che rimangono da deteminarsi, e dei punti, i quali coi concorsi delle PA, PB, serviranno di norma onde tracciare le prospettive delle parti visibili degli spigoli orizzontali, spettanti alle facce dell' obbiettivo nascoste all' occhio.

147. *Determinare la prospettiva d' un edifizio a base ottagona regolare, con frontispizio e porte a piattabanda su cadauna faccia, e diviso a bubugne* (Fig. XXI).

Rappresenti $r' f' g' g f$ ecc. l' icnografia, $a b'$ la linea del taglio, posta perpendicolare alle $r' f'$, $r f$; $q q'$, una linea dividente per metà l' icnografia e perpendicolare alla $a b'$; $e e''$ la terza parte della linea di distanza. Mostri $K P S Q$ ecc. metà dell' ortografia, effettuata supponendo il piano ortografico parallelo alla parete, $Q A'$ la fondamentale

ortografica, Q l' ortografia della $q\,q'$. Finalmente indichi $A''' A''$ la fondamentale prospettica, Q' la projezione sulla parete della $q\,q'$, $K' Q'$ una perpendicolare alla $A''' A''$, E il punto principale ecc. Si determini la prospettiva del perimetro di cadauna delle facce projettate in $f\,g$, $g'\,f'$, come nel § 137; e congiunti gli estremi delle prospettive degli spigoli corrispondenti a g, g', avrassi pure la prospettiva dell' altra faccia la cui icnografia è $g\,g'$. Lo stesso si operi rispetto al zoccolo corrispondente alle tre faccie suddette. Ritrovisi la direzione prospettica 1 2 della retta espressa nell' ortografia in 1' 2', dal punto 2 si ecciti una parallela alla orizzontale, e dal punto 3 una linea diretta al concorso spettante al piano della faccia I. Delle normali innalzate sulle projezioni degli opportuni punti prospettici, daranno gli spigoli verticali esterni delle spalle delle porte e quelli verticali del zoccolo. Le prospettive delle intersecazioni dei piani orizzontali delle piattabande e di quelle del terreno coi piani delle spalle, avransi appoggiandosi ai punti esterni di esse intersecazioni già determinati, e rispettivamente ai seguenti concorsi, cioè al punto E per la faccia II, al concorso della faccia III per la I, ed a quello della I per la III. Tre normali innalzate nel modo usato, determineranno gli spigoli interni delle spalle visibili delle porte, e tre rette, due guidate dai punti 4 e 8 ai concorsi dei piani delle faccie I e III, l' altra eccitata dal punto 6 parallelamente alla fondamentale, porgeranno le

immagini degli spigoli interni delle piattabande. Le prospettive delle divisioni orizzontali delle bugne, avransi ripetendo per ciascun corso il processo che fu usato per la determinazione degli spigoli orizzontali esterni delle piattabande, e quelle verticali per mezzo di normali. Le divisioni delle faccie dei cunei esistenti nel piano II si otterranno usando la medesima operazione che si farebbe volendosi determinare l' ortografia di una piattabanda adattata ad un vano 7 5 (§ 71).

Prima di progredire più oltre, osserveremo che per essere effettuata l' ortografia su di un piano parallelo alla parete, la projezione di qualunque retta obbiettiva sulla parete nominata risulterà situata rispetto alle $K'Q'$, $A'''A''$, come l' ortografia della stessa obbiettiva lo è rispetto alle QK, QA'. Questa riflessione ci somministra il mezzo onde ricavare speditamente dal piano ortografico la distanza di qualunque punto d'incontro dalla di lui projezione. Diffatti vogliasi la distanza sopramenzionata per l' obbiettiva di $M'N'$; presa QB' eguale a $b'q$, innalzata la $B'N''$ perpendicolare alla QA', e prolungata $M'N'$, evidentemente l' intervallo compreso fra l' intersezione N'' di questa colla $B'N''$ ed il punto B', sarà quanto si cerca; perciò se nella linea d'incontro $B''n''$, della faccia III, si ponga l' intervallo $B''n''$, uguale a $B'N''$, sarà n'' il punto d' incontro dell' obbiettiva in quistione. Rifletteremo inoltre che per la simmetrica disposizione dell' obbiettivo rispetto alla parete, i due sistemi di punti d' incontro cor-

rispondenti alle faccie III e I, dovendo risultare disposti in modo perfettamente simile negli angoli $K' Q' A''$, $K' Q' A'''$, così la distanza $B'' n''$ posta sopra la $B''' n'''$, linea d'incontro del piano della faccia I, sarà n''' il punto d'incontro dell'obbiettiva della III analoga alla $m' n'$.

Col soccorso dei punti d'incontro ritrovati nel modo che testè dicemmo e dei punti m, m', si traccino le direzioni prospettiche $n m$, $n' m'$, il punto s in cui si taglieranno sarà comune alle direzioni prospettiche delle altre divisioni dei cunei, quindi ritrovati i punti d'incontro di queste, le loro prospettive potranno immediatamente segnarsi. Se i punti d'incontro delle divisioni riescissero incomodi a motivo della loro soverchia distanza, si potrà servirsi de' luoghi in cui le solite normali taglieranno la 1 2: fatto lo stesso per la piattabanda della I, si segnino le prospettive delle divisioni orizzontali dei cunei delle tre piattabande, dirigendole dalle prospettive dei punti estremi di esse che sono già determinate, ai rispettivi concorsi superiormente accennati.

Riguardo alle prospettive dei frontispizj, determinato nella ortografia e nel modo che fu detto di sopra, il sistema ortografico TV, UX, ZY dei punti d'incontro spettante a quello della III, si facciano i due $A'' T' V' B''$, $B''' V'' T'' A'''$ uguali al sopradetto, e disposti negli angoli $K' Q' A''$, $K' Q' A''$, in modo che $Q' B''$; $Q' B'''$ sieno uguali a $Q B'$, e ritrovati di poi i quattro punti di concorso appartenenti alle cornici inclinate dei due frontispizj,

delle I, III (§ 139), si segnino le direzioni prospettiche di ogni linea delle medesime. Le prospettive op, $o'p'$, $o''p''$, $o'''p'''$ dei profili, saranno determinate per mezzo di normali. Dai punti compresi fra $c''o''$ si ecciteranno delle parallele alla orizzontale, e dagli altri compresi fra $p''c''$, $c'''p'''$, delle rette inclinate alla $c''c'''$ come le ortografie corrispondenti lo sono alla fondamentale ortografica (§ 64, III). Per la parte di cornice corrispondente a DD', converrà rintracciare per punti la prospettiva dd' del profilo projettato in DD', e quindi condurre dall' una e dall' altra parte delle parallele alle $c'''d$, $c''d$, e con ciò sarà finalmente compita la prospettiva richiesta.

Osserveremo che per l' esperto disegnatore non sarà necessario il rinvenire ogni punto degli incontri $V'T'$, $U'X'$ ecc., ma che ritrovati i punti estremi V', T' ecc. e qualche altro intermedio se la cornice sarà complicata, gli riescirà dipoi facile il descrivere ad occhio con approssimazione più che sufficiente gli incontri delle cornici; e questo è pure uno dei molti vantaggi, e lo diciamo per esperienza, derivanti dall' uso dei punti e delle linee d' incontro.

148. Speriamo che il lettore versato nelle cose di prospettiva, avrà almeno traveduto il notabile vantaggio che alla pratica di questa bell' arte recano i punti e le linee d' incontro. Egli è però necessario l' avvertire, che tanto questi che i punti e le linee di concorso è mestieri l' usarne avvedutamente; in primo luogo perchè se fosse pro-

posto un oggetto del tutto irregolare, e non avente alcuna faccia parallela al piano geometrico (si osservi che obbiettivi di tal natura assai di rado incontra chi pratica la prospettiva, perciocchè principale uffizio di questa è la rappresentazione delle architetture, le quali presso ogni nazione hanno per primo elemento la simmetria) diciam dunque in primo luogo, che se fosse proposto un obbiettivo come il sopradetto, converrebbe maggiormente, ed ognuno che abbia ponderato quanto fu da noi esposto nel corso di questo trattato può convincersene, il ricercare la prospettiva del vertice di cadaun angolo solido di lui con uno dei metodi esposti dal § 131 al 135; in secondo luogo convien acquistare colla pratica un giudizio il quale faccia immediatamente ritrovare quelle tra le combinazioni delle operazioni fondamentali, esposte dal § 106 sino al 147, conducente per la via più breve allo scopo prefisso. Così per esempio, essendo proposto il prisma retto ottagono dei §§ 142 e 143, la prima idea che si presenterà forse al prospettico sarà quella di cercare l' immagine di cadauna delle due basi del prisma suddetto; ma questo non è il metodo più spedito, ed invece converrà adottare quello che fu da noi esposto. Nei §§ poi 145 e 146 abbrevia d' assai l' operazione, il servirsi di linee d' incontro e di piani supposti.

Potrebbe ad alcuno, e con ragione, sembrare imbarazzante l' uso dei punti di concorso e d' incontro, quando questi a motivo della poca

inclinazione delle obbiettive colla parete, risultassero assai distanti dalla direttrice o dalla orizzontale, ma a rendere quasi nullo quest' inconveniente, pei primi si presta il *triregolo*, strumento diretto allo stesso fine del *parallelo scenografico* già da noi proposto in altr' opera, ma da preferirsi al medesimo perchè d' un assai più facile maneggio, perchè la sua costruzione è semplicissima e poco costosa, e perchè simultaneamente si presta ad altri usi. Si vedrà la descrizione di questo nell'App. I. Per iscansare poi il medesimo inconveniente nei secondi, si useranno ripieghi analoghi a quello del § 141, cioè si avrà l' avvertenza di trovare prima la prospettiva delle rette più inclinate alla parete, e di appoggiarsi per ottenere quelle di maggiore inclinazione, agli estremi delle prime, ovvero si collocherà, quando le circostanze il permettano, la linea del taglio per modo che sia assai vicina all' icnografia dell' obbiettivo, oppure la seghi, come fu usato nei §§ 146 e 147. Qui porremo termine a ciò che risguarda le rette, sembrandoci che quanto abbiamo esposto, sia sufficiente a condurre per il più breve cammino qualunque corto ingegno, a conseguire la prospettiva di ogni oggetto conterminato da piani.

Determinazione grafica delle prospettive delle curve.

Abbiam già veduto nei §§ 82 e 83, che il prospettico poteva incontrare nei suoi lavori e delle linee curve irregolari, capricciose, e di quelle soggette ad una legge costante. Riguardo alla determinazione grafica delle prime non abbiamo che dire, perciocchè essendosi visto il modo di rintracciare la prospettiva di un punto comunque situato riguardo agli elementi delle operazioni prospettiche, ciascuno sarà quindi a tale di delinearle senza ulteriori schiarimenti. Rispetto alle seconde, dicemmo che in luogo di descriverle col processo laborioso, indispensabile per ottenere le prime, conveniva generalmente, almanco per quelle di questa specie che più di frequente s'incontrano nelle prospettive, di adottare metodi di descrizione dedotte dalle proprietà delle curve proposte. Siccome però, come abbiamo già dato ad intendere, in alcuni casi particolari, cioè specialmente quando trattasi di circoli od ellissi di ristretta dimensione e disposti simmetricamente in un medesimo piano verticale od orizzontale, la determinazione per punti può essere vantaggiosa alla speditezza del lavoro, premetteremo alcune applicazioni di tale metodo a circoli od ellissi disposti colle suddette circostanze.

149. *Determinare la prospettiva di una serie di circoli disposti in piano orizzontale, e coi loro centri in una stessa retta* (Fig. XXII).

Esistino in primo luogo i circoli proposti nel piano geometrico, e sieno dessi rappresentati da X, Y, mostri $C\,G$ la linea del taglio, $a'd'$ la fondamentale prospettica, $z\,o$ la orizzontale ecc. Si segni la $N\,C$ passante pei centri dei circoli, e che incontri in C la $C\,G$, indi dal centro R del circolo più vicino alla $C\,G$ si segni l'altra $R\,G$ giugnente pure alla $C\,G$, e ad angoli retti colla $R\,C$. Diviso l'arco $H\,L\,I$ alla metà in L, dai punti H, L, I si traccino le $I\,D$, $L\,F$; $L\,B$, $H\,A$, le due prime parallele ad $R\,G$ e le seconde ad $R\,C$. Si trovino, il concorso spettante ad $R\,C$ che sarà o e quello appartenente ad $R\,G$ che cade fuori della tavola e chiameremo z. I punti A, B, C; D, F, G, si trasportino sulla fondamentale in a, b, c; d, f, g, e si segnino i punti a', b' distanti dal punto c come lo sono gli a, b, e parimenti si segnino i punti $f'\,d'$, distanti da g quanto lo sono gli f, d.

Ciò eseguito dai punti a, b, c, b', a' si traccino delle linee concorrenti in o, e dagli altri d', f', g, f, d le altre concorrenti in z. Evidentemente nelle linee ora tracciate esisteranno le prospettive delle corrispondenti $H\,G$, $L\,F$, $I\,D$; $H\,A$, $L\,B$, $I\,C$, e di altrettante che segassero gli altri tre quadranti del circolo in modo eguale al quadrante $H\,L\,I$, e perciò se si uniranno le intersecazioni che sono le prospettive dei punti H, L, I ed analoghi che si suppongono esistere negli altri tre quadranti, avrassi formata la prospettiva del circolo Y, come è facile scorgersi dalla figura stessa.

Per l'altro circolo X si trovi primieramente

la prospettiva del suo punto M, che cade sulla $o\,c$ e sarà m. Per m si tracci la $m\,d''$ concorrente in z, e da d si produca la $d\,o$ a segarla in d''. Da d'' si ecciti la $d''d'''$ parallela ad $a'd'$, e dai punti rimanenti f, g, f', d', si segnino le altre concorrenti in o onde determinare i punti f'', g', f''' d'''. Da tali punti si conducano delle linee concorrenti in z; nelle intersezioni di queste colle altre già guidate dai punti a', b', c, b, a al punto o, esisteranno le prospettive dei punti del circolo X, disposti in modo simile a quelli del circolo Y di cui si è determinata la prospettiva, per cui potrà segnarsi anche quella in discorso. Per tutti i circoli che esistessero col centro sulla $C\,N$, si ripeterà un'operazione perfettamente uguale alla testè detta.

Se i circoli obbiettivi saranno superiori al piano geometrico, sarà mestieri di prima trovare la linea d' incontro del piano su cui esistono i circoli, e di poi si opererà riguardo alla icnografia alla linea d' incontro ed alla linea del taglio, come si fece orora rispetto agli obbiettivi X, Y, alla linea del taglio ed alla fondamentale.

150. *Determinare la prospettiva di una serie d' archi tutti esistenti nel medesimo piano verticale, e coi centri in una stessa retta* (Figura XXIII).

Rappresenti $f\,g\,p\,r\,q$ l' ortografia di uno degli archi enunciati, $g\,r$ il relativo diametro, $A\,B$, $C\,D$ due icnografie degli archi medesimi, $F\,g'$ la linea del taglio, o il concorso spettante a $g\,r$, $l'f'$ la linea d' incontro del piano su cui esistono gli archi

testè detti ecc. Si protraggano le gf, rq sino a toccare la orizzontale lm tangente al semicircolo gpr. Si segni la diagonale mg, e dalla sezione s di questa coll' arco, si faccia passare la in parallela ad lm, e quindi avendo tracciata la nf si segni la ho passante per la sezione t pure parallelamente ad lm. I punti l, i, h, g, si trasportino sulla $l'f'$, ponendoli distanti da f' come i corrispondenti lo sono da f. Da questi punti (che saranno evidentemente quelli d' incontro delle lm, in, ho, gr,) si eccitino le $l'o$, $i'o$, $h'o$, $g'o$, $f'o$, e trovate le prospettive $m'q'$, $m''q''$ delle lf, mq, dalle intersecazioni di tali prospettive colle rette concorrenti in o già accennate, si segnino le $m'r''$, $n'q''$, $m''r'$, $n''q'$. I punti r', t', s', p' ecc. saranno evidentemente prospettive di punti r, t, s, p ecc., e quindi la curva r', p', r'' guidata a mano per essi, sarà la prospettiva richiesta.

L' arco che seguita e qualunque altro che si volesse in linea con questi due, si rinviene in modo perfettamente simile al suddescritto, valendosi costantemente delle linee concorrenti in o.

151. *Della prospettiva di un circolo orizzontale, avente il centro in un piano verticale passante pel raggio principale* (Fig. XXIV).

Sia in $ADBC$ espresso il circolo proposto, sia E il punto di stazione, IL la linea del taglio, ed il la linea d' incontro del piano su cui esiste il circolo predetto, la quale sarà la fondamentale nel caso che il circolo esista nel piano geometrico, od una linea parallela a questa nel caso di-

verso. Dal punto E conducansi due rette AE, BE tangenti il circolo nei punti A, B, determinati con precisione nel modo seguente. Essendo H il centro del circolo, dividasi la HE per metà in F, ove fatto centro, con un raggio FH descrivasi un arco di circolo, che segherà la detta circonferenza nei punti A, B, pei quali debbono passare le tangenti, che in sostanza altro non sono che le linee visuali o i raggi corrispondenti agli obbiettivi A, B. Condotta la corda AB determino la sua prospettiva in ab, la quale sarà un asse dell' ellisse prospettica, e le am, bn le corrispondenti tangenti (§ 91); perciò saranno queste egualmente distanti dalla direttrice ep, che sarà pure la direzione prospettica dell' altr' asse, mentre DC rappresenterà l'obbiettivo di esso (§ cit.). Si cerchi adunque la prospettiva del punto C, per mezzo del metodo che si conosce, o più brevemente mediante il seguente artifizio. Pei punti A, C si conduca la AC, prolungandola a segare la linea del taglio in G, si trasporti in pg la PG, e pei punti a, g si segni la ag la quale segherà nel cercato punto c la direttrice pe. Ciò posto prendasi la hd eguale alla hc, e sarà dc l'altr'asse dell'ellisse, per cui potrassi coi metodi noti, e che indicheremo nell'App. II, descriversi, ed avrassi così in essa la prospettiva del circolo proposto.

Approfittando di una proprietà dell' ellisse, si potrebbe in alcuni casi con vantaggio, al metodo ora accennato sostituire il seguente. Trovata la prospettiva di un altro punto del circolo, per

esempio di *R*, col metodo noto, sia questa *r*, da *r* si segni la *s r* parallela all'asse *d c* e lunga in modo che sia divisa in due parti eguali dall'asse *a b*, e quindi alla destra della *d c* si disponga un'altra retta *t v* simile in lunghezza e posizione alla *s r*. I punti *s*, *t*, *v*, *r* appartengono all'ellisse di cui si ragiona (App. II). In modo simile si potranno trovare a quattro a quattro, quanti altri punti della ellisse si desiderassero.

152. *Della prospettiva di un' ellisse orizzontale, avente un asse nel piano indicato nel § antecedente.*

Si ottiene con un' operazione analoga allo stesso antecedente §, se si eccettua il modo insegnato pel ritrovamento dei punti di contatto, che si vedrà nell'App. II.

153. *Di un circolo o di una ellisse esistenti su di un piano inclinato al piano geometrico, ma che abbiano il centro od un asse nel piano verticale accennato nei §§ superiori.*

Serve pure una regola analoga a quella del § 151.

154. *Della prospettiva di un circolo orizzontale, avente il centro fuori della posizione detta nei §§ superiori* (Fig. XXV).

Sia *B C A D* il proposto circolo, *I L* rappresenti la linea del taglio, ed *i l* la linea d'incontro del piano di esso circolo. Uniscasi il centro *G* ed il punto di stazione *E*, sieno determinati nel modo superiormente spiegato i due punti di contatto *A*, *B* tra il circolo e le due tangenti che par-

tono da E, e si segni la corda AB, la quale pel § 93 apparterrà ad un diametro dell' ellisse prospettica (i). S' immagini condotta da E una parallela alla linea del taglio fino ad incontrare la corda BA prolungata, da questo punto d' unione s' intenda segnata una tangente al circolo $ADBC$, e sia C il suo punto di contatto. Dai punti C ed E si segni la CE, la quale segando il circolo ora accennato in D, darà in CD la corda appartenente alla prospettiva formante il diametro conjugato a quello ora accennato (§ cit.). Egli è però utile l' avvertire riguardo alla corda CD ritrovata nel modo ora indicato, che dovendo la prospettiva corrispondente essere parallela alla linea dell' altezza (§ 67) cioè verticale, e nel mezzo della prospettiva di AB, dovrà pure la di lei projezione O essere nel mezzo dei punti P, Q, che sono le projezioni prospettiche degli estremi del relativo diametro corrispondente ad AB, non che delle rispettive tangenti, tralasciando perciò l' operazione ora accennata che riesce generalmente incomoda, si procederà per un metodo inverso, cioè, diviso l' intervallo PQ nel mezzo in O, si conduca la EO, prolungandola a segare in D la proposta circonferenza. Si osservi inoltre che il diametro del circolo in quistione che risulta perpendicolare alla IL, forma pure un diametro della ellisse prospettica (§ 96), perciò se si segnerà dal centro G la GH perpendicolare ad IL, nella sezione H di essa colla corda B esisterà l' obbiettivo del centro dell' ellisse ora ac-

cennata, per cui indipendentemente dal punto di stazione potrà pure trovarsi coi punti O, H, sempre alla mano del disegnatore, la corda DC più volte menzionata.

Determinate così nel modo che tornerà più comodo le corde AB, DC, si trovi la prospettiva di AB e sia la ab, per la quale operazione si avranno pure le tangenti bp, aq. Dividasi la pq per metà in o, e s' innalzi dal punto o la normale oc, che sarà evidentemente la direzione prospettica di CD, per cui trovata su essa la prospettiva di un punto estremo di questa, per esempio di C che sarà c, si replicherà cg in gd, e si avrà in cd il diametro conjugato di ba, i quali diametri serviranno per la descrizione della prospettiva ricercata, usando del metodo che insegneremo nell' App. II.

In maniera analoga a quella insegnata nell' antecedente fig. per trovare i punti r, s, t, v, se ne potrebbero pure in questa rinvenire altri a quattro a quattro, trovando per esempio la prospettiva di un punto R, e disponendo due rette rs, tv parallelamente a dc e ad ugual distanza, e lunghe in modo che siano divise ciascuna in due parti eguali alla rx.

155. *Della prospettiva di un circolo o di una ellisse, aventi qualunque posizione fuori delle accennate e della verticale.*

Si ottiene con un'operazione analoga a quella del § antecedente.

156. *Della prospettiva di un circolo esistente su di un piano verticale* (Fig. XXVI).

Sia $A\,B$ l'icnografia ad un tempo di un diametro e del circolo enunciato, $I\,L$ la linea del taglio, $i\,l$ la orizzontale, $x\,i$ la linea d'incontro del piano del circolo, l il concorso di $A\,B$, ecc. Si descriva la prospettiva del diametro projettato in $A\,B$ e sia la $b\,a$, la quale sarà pure un diametro dell'ellisse prospettica (§ 95). Dal punto di mezzo di $b\,a$ si conduca la normale $c\,c'$, nella quale debbe trovarsi l'altro diametro dell'ellisse ora accennata. Dividasi $M\,N$ per mezzo in S, e conducasi la $E\,S$ prolungandola a segare la $A\,B$ in D, il qual punto, per l'osservazione fatta nel § 154, sarà la projezione del diametro sopradetto. Se poi sopra $A\,B$ si descriva un semicircolo, e che s'innalzi su $B\,A$ la perpendicolare $C\,D$, è chiaro che questa rappresenterà la lunghezza della metà della corda la cui prospettiva debbe essere l'altro diametro, cadente come si è detto sopra $c\,c'$, ed è pure evidente che, trovato il punto d'incontro o spettante al diametro projettato in $A\,B$, se si prenderà $x\,o$ uguale a $C\,D$, e se si condurrà la $x\,l$, il punto c in cui questa incontrerà la $c\,c'$ sarà la prospettiva del punto C, supposto per una rotazione del semicircolo sopra la $B\,A$ ad insistere perpendicolarmente sopra D, e determinerà perciò uno degli estremi del diametro in quistione. Replicando $c\,d$ in $d\,c'$ sarà determinato in $c\,c'$ il diametro conjugato di $b\,a$, per cui si potrà descrivere l'ellisse $a\,c\,b\,c'$, prospettiva del circolo proposto.

I diametri $b\,a$, $c\,c'$ ci porgono come nelle

due antecedenti figure il mezzo di segnare a quattro a quattro altri punti, trovandone uno nel modo che sono per indicare. Si segni una $P\,Q$ parallela a $C\,D$, e che come questa sarà una semicorda del circolo obbiettivo ridotta in un piano orizzontale per mezzo di una rotazione intorno alla $A\,B$. Con tale supposizione si trovi la direzione prospettica della sua vera posizione e sia questa la $p\,p'$, e quindi appoggiandosi alla $P\,Q$ si determini il punto p, in modo perfettamente simile a quello usato pel punto c. I punti p', r, r' si otterranno come fu fatto nelle analoghe operazioni del § 154.

Si osservi che se si prenderanno i due punti y, y' distanti da o quanto il semidiametro $A\,R$, e si tracceranno le $y\,l$, $y'\,l$, queste due rette formeranno le tangenti estreme della ellisse $c\,a\,c'\,b$, cioè le direzioni prospettiche di due tangenti orizzontali che s' intendessero tracciate nel circolo obbiettivo.

157. *Dato un circolo orizzontale col centro fuori del piano verticale accennato nel* § 151, *trovar quelle corde che sono gli obbiettivi degli assi dell' ellisse prospettica* (Fig. XXVII).

Sia $A\,D\,B\,C$ il proposto circolo, $X'\,V$ la linea del taglio, E il punto di stazione, ed $H\,I$ una retta passante per E parallelamente alla $X'\,V$. Si trovino le punteggiate $A\,B$, $C\,D$, come nel § 154, le quali saranno gli obbiettivi dei diametri conjugati dell' ellisse prospettica. Dal punto estremo A della $A\,B$ si faccia passare la indefinita $F'\,F$ parallela ad $X'\,V$, sui due punti T, E s' innalzino

le $E E'$, $T X$ perpendicolari alla $C E$, e si faccia la prima eguale alla distanza fra la linea d'incontro del piano del circolo e la orizzontale. Dal punto E' e dai due C, G si eccitino le $E' C$, $E' G$, e l'intervallo fra le sezioni X, Z di queste colla $X T$ si trasporti in $X' Z'$, appoggiandosi a Z', sezione della tangente $A E$ colla $X' V$. Da X' si protragga la $F' X'$ diretta ad E a segare la $F' F$, e quindi si replichi la $F' A$ in $F A$; coi punti F', F e G, si segnino le $P I$, $F' I'$, e dalle sezioni P, Q di queste col circolo, si prolunghi una linea a segare la $H I$. Da questo punto di sezione H, si tiri una tangente al circolo proposto, ed essendo M il suo punto di contatto, si traccerà la retta $M L$ passante per G che sarà l'obbiettiva di un asse, e l'altra retta $N O$ che è diretta al punto H e passa pure per G corrisponderà all' altr' asse.

Essendo la dimostrazione di una tale operazione di un genere che non s'accorda colle cognizioni che si esigono nel contesto dell' opera, si limiteremo a far conoscere che tutte le linee tendenti allo scopo richiesto dell' enunciato, trasportate in prospettiva, hanno le condizioni volute in quelle della Fig. LXXVI spettante all'App. II, e che servono a rintracciare gli assi dati i diametri conjugati. E primieramente abbiam già veduto che le $A B$, $C D$ corrispondono ai diametri conjugati dell' ellisse prospettica e G al centro, corrisponderanno quindi le prime alle $A B$, $C D$, della Fig. LXXVI, e G a G. Inoltre pel § 64, I la prospettiva di $F' F$ è orizzontale, e pel § 67 quella

della CD risulta verticale, dunque queste due rette avranno le prospettive perpendicolari l'una all' altra, cioè si verificherà in esse una condizione delle $F'F$, DC della Fig. LXXVI. Con una rotazione delle XT, $E'E$ intorno alla CE sino a divenir verticali, si comprenderà essere XZ eguale alla metà della prospettiva di CD, ed essendo evidentemente $X'Z'$ eguale alla prospettiva di $F'A$ e di AF, si conclude essere eguali le prospettive di $F'F$, CD, per cui verificherassi in esse la seconda condizione delle $F'F$, CD della Fig. LXXVI, quindi le $F'I'$, PI dell'una figura corrisponderanno alle $F'I'$, PI dell' altra.

Rimane ora da dimostrarsi che le prospettive di ML, NO hanno le condizioni delle ML, NO (Fig. LXXVI), le quali si dissero rappresentare due linee in cui esistono gli assi dell'ellisse. Ora convien riflettere che se la prospettiva del circolo dato fosse descritta, le prospettive delle corde PI, QI' sarebbero eguali, perchè risulterebbero segnate colle condizioni delle IP, $I'Q'$ (Fig. LXXVI). Ora la prospettiva della PQ sarà quella di una corda unente gli estremi di due eguali diametri dell' ellisse prospettica del circolo, ed è evidente che una tangente all' arco ellittico corrispondente a PMQ condotta in modo che risulti parallela alla prospettiva di PQ, toccherà esso arco in un punto che lo dividerà in due parti perfettamente uguali, e che quindi una retta guidata dal punto di contatto al centro dell'ellisse, che come si è detto, corrisponderà a G,

dividerà la prospettiva dell' angolo $P\,G\,Q$ in due parti eguali, ma tale è appunto la condizione della $M\,G$, giacchè pel § 90 la $M\,H$ sarà tangente alla prospettiva del circolo, e pel § 67 essa sarà parallela alla prospettiva di $P\,Q$. Dovendo poi essere le prospettive delle due $H\,N$, $H\,M$ parallele pel citato § 67, ne verrà adunque che la prospettiva di $N\,O$ sarà perpendicolare a quella di $M\,L$, e dovendo d' altronde la prospettiva di $N\,O$ passare pel centro della ellisse in discorso, avrà quindi le condizioni della $N\,O$ (Fig. LXXVI).

158. *Data la prospettiva di un arco verticale, trovare quella del punto più distante dalla orizzontale, che è quanto dire, il punto di contatto di una tangente orizzontale* (Fig. XXIII).

S'intenda protratta la $A\,F$ sino ad incontrare una retta che parte dal punto di stazione parallelamente alla linea del taglio, ed avendo sulla orizzontale ortografica $d\,x$, preso un punto x distante da d analogo di D, quanto quest' ultimo punto è distante dal punto d' unione delle due rette sopraccennate, si trovi nell' arco il punto di contatto z di una tangente guidata da x all'arco stesso, e questo punto z sarà quello che si cerca (§ 67). Lo stesso dicasi di qualunque altro arco si trovasse in linea col suddescritto.

159. *Di un solido poggiato sul piano geometrico e composto da varj cilindri come nelle* Figure XXVIII e XXIX.

Abbia in primo luogo un tal solido il suo asse su di un piano verticale passante pel raggio

principale. Sia la icnografia dei cilindri indicata in *I U O*, *H V N* (Fig. XXVIII), la linea del taglio sia la *R B*, *S S'* la fondamentale prospettica, *m B'* la orizzontale, ecc. Le altezze spettanti ai pezzi cilindrici di cui componesi il solido le supporremo marcate sulla *D S*, come si vede nella figura. Si segnino primieramente le note linee visuali tangenti alle icnografie dei cilindri, e sieno *H*, *N*; *I*, *O* i loro punti di contatto. Essendo le tangenti ora nominate le projezioni comuni a tutti que' raggi visuali che costituiscono coi loro punti di contatto le verticali spettanti al contorno apparente del solido, i punti *I*, *O*; *H*, *N*, saranno perciò le icnografie di esse verticali, le prospettive delle quali insistono sulle corrispondenti intersecazioni delle tangenti testè dette colla linea del taglio. Per le prospettive dei circoli formati dalle sezioni de' piani orizzontali colle superficie convesse dei cilindri, potrebbe servire il metodo insegnato nel § 151. Potendosi però (approfittando della disposizione di essi) semplificare alquanto l' operazione col legare le varie operazioni separate, insegneremo quivi come ciò si eseguisce. Dai punti *V*, *U* sezioni delle icnografie dei cilindri colla linea di distanza, come pure dai punti di contatto *N*, *O*, si conducano quattro parallele a segare la linea del taglio in *F*, *Z*, *T*, *X*, ed aventi quella inclinazione che torni più comoda all' operatore. Di queste rette si trovi il concorso e sia desso *B'*. Sui punti *F*, *Z*, *T*, *X*, si innalzino quattro normali, sulle

quali, appoggiandosi alla fondamentale $S' S$, si trasportino le altezze marcate sulla $D S$, come può scorgersi osservando la figura. Dai punti di ciascuna di queste si conducano delle rette tutte concorrenti in B' a segare le corrispondenti verticali prospettiche, per esempio, quelle che provengono dai punti d', o segheranno la $b' b''$, e quelle provenienti da p', s', la $r' r''$. Tutti i punti marcati sulla $f' T$ daranno le sezioni sulla $h h'$, osservando di tralasciare quei punti che nella prospettiva si nascondono all'occhio, e le sezioni provenienti dai punti delle $f F$, $d Z$ saranno tutte sulla direttrice. Dai punti b', b''; h, h', ecc. si traccino delle orizzontali sino a toccare le verticali che formano le prospettive del contorno apparente dell' altro lato, le quali costituiranno gli assi maggiori delle corrispondenti ellissi, e le distanze tra i punti di già marcati su essa direttrice e le sezioni colla stessa dei corrispondenti assi ora accennati, ne formeranno il semiasse minore. Per maggior chiarezza avendo, a cagion d'esempio, dai punti d, d' tracciate le $b' d'$, $a d$ concorrenti in B', si segni da b' la orizzontale $b b'$, la quale sarà l'asse maggiore, mentre $a n$ formerà l' asse minore della semiellisse $b a b'$. Lo stesso dicasi delle altre ellissi prospettiche. Osserveremo che per rispetto alle bugne di cui componesi il maggior cilindro, essendo esse in numero di cinque e dell'egual dimensione, basterà dividere in cinque parti eguali la $h h'$ e la $g' g$ per avere i corrispondenti punti.

Non esista in secondo luogo l'asse dei cilin-

dri nel prolungamento del raggio principale (Figura XXIX). In questo caso con un' operazione analoga alla testè descritta si otterranno i diametri conjugati di cadauna ellisse prospettica, invece degli assi determinati nell'antecedente figura, dei quali i minori saranno verticali, ed i maggiori concorreranno ad un punto dell' orizzontale che sarà da determinarsi coi soliti mezzi. Egli è d'avvertirsi però che i punti che prima cadevano sopra la direttrice, quivi invece cadranno sopra le normali $a\,A'$, $b\,b'$, $c'\,c$, le quali si otterranno innalzandole sui punti A, A', posti alla metà delle $X'\,X$, $T\,T'$. Oltre di ciò i punti V, U della figura antecedente dovranno essere, nel caso di cui si parla, determinati, conducendo due rette $A'\,U$, $A\,V$ al punto di stazione.

160. *Della prospettiva di una sfera* (Fig. XXX).

Sia $D\,P\,C\,P'$ l' icnografia della sfera ed E il punto di stazione. Uniscasi il centro della prima F ed E colla retta $F\,E$, e su F s' innalzi la $F\,f$ perpendicolare ad $F\,E$ e di lunghezza eguale alla distanza tra il centro della sfera ed un piano passante pel punto di vista e per la orizzontale, indi col centro in f e raggio uguale ad $F\,C$ si segni il circolo $l\,m\,n\,o$, a questo si conducano le tangenti $E\,o$, $E\,m$, e pei punti di contatto o, m si segni la corda $o\,m$. Da questi punti e da p, mezzo di $o\,m$, si tirino le $O\,o$, $P'\,p$, $M\,m$ parallele alla $F\,f$. L'incontro delle $O\,o$, $M\,m$ con $D\,C$ daranno in $O\,M$ l'asse minore dell' ellisse che è icnografia del contorno apparente della sfera, e facendo $P\,H$, $H\,P'$ uguali a $p\,m$, o $p\,o$, avrassi in $P'\,P$ l' asse maggiore.

Segnando una XV parallela a DE e distante da questa quanto è lunga la linea di stazione, si avranno, prolungando le Oo, $P'p$, Mm sino alla XV suddetta, le $O'o$, $P''p$, $M'm$, rappresentanti ciascuna l' altezza del corrispondente punto obbiettivo di o, p, m sul piano geometrico.

Infatti essendo il contorno apparente di una sfera un circolo, avente il piano perpendicolare alla retta che unisce il di lui centro col punto di vista (§79), se immagineremo che per una rotazione sulla DE del sistema piano composto dal circolo $lmno$ dalle sue tangenti e dalle altre rette ad esso spettanti, compresa la XV, venga ad adattarsi ad un piano verticale, vedrassi chiaramente essere $lmno$ la sezione della sfera col piano verticale accennato, evidentemente eguale alla ortografia di lei, om sarà la sezione del contorno apparente collo stesso piano verticale, pure eguale alla di lui ortografia, ed XV la sezione del piano verticale col piano geometrico che equivale alla fondamentale ortografica. Così pure il diametro del contorno apparente che nel piano verticale si scorge projettato in p e che è uguale in dimensione ad om, avrà per icnografia $P'P$ uguale ad om, ed OM sarà la icnografia di om.

Inteso questo resta da determinarsi la posizione della parete, dopo la quale si troverà la prospettiva del contorno apparente, che è pure quella della sfera, con un metodo identico a quello insegnato nel § 151 se la parete è parallela alla $P'P$, oppure con un metodo analogo a quello del § 154 se la stessa ha un' altra posizione.

Riguardo alle linee visuali AE, BE, avvertiremo che i punti di contatto A, B di esse colla ellisse $OP'MP$, appartengono pure alla icnografia della sfera $ACBD$, che la corda AB è parallela alla $P'P$, e che essa AB sarà la projezione di uno degli assi o di un diametro della prospettiva della sfera, a seconda che la parete riescirà perpendicolare oppure obbliqua alla ED; cose facili a riconoscersi.

161. *Di un' ellissoide avente l' asse verticale* (Fig. XXXI).

Rappresenti $DP'CP$ la sua icnografia ed E il punto di stazione. Sul centro F s' innalzi la Fq, e preso Ff eguale alla distanza del centro dell' ellissoide da un piano orizzontale passante pel punto di vista, si descriva simmetricamente intorno al punto f un' ellisse $lqnr$ che sia uguale alla ellisse generatrice della data ellissoide. Da E si guidino le tangenti Eo, Em, uniti colla om i punti di contatto si divida questa a metà in p, e dai punti m, p, o si eccitino tre perpendicolari alla DE. Pel punto p si conduca la ug parallela ad nl, fatto centro in g si descriva l' arco circolare uh, e finalmente si prendano le due HP', HP eguali a ph. Le OM, PP' saranno gli assi della icnografia del contorno apparente. Segnando quindi come si disse della sfera la XV parallela a DE e distante da essa quanto è lunga la linea di stazione, avransi i dati onde conoscere la distanza dei punti che abbisognano dal piano geometrico, come nella figura antecedente si disse.

Così pure un metodo analogo a quello del § 151 servirà per trovarne la prospettiva nel caso che la linea del taglio sia parallela alla $P' P$, ed un metodo uguale a quello del § 154 nel caso diverso.

Mediante una ruotazione fatta come nel § antecedente si disse, si comprende la dimostrazione della operazione che dicemmo. Per rispetto all' asse $P' P$ doppio di hp, s' immagini un piano passante per la gu e segante l' ellissoide perpendicolarmente all'asse rappresentato da rq, evidentemente la sezione risultante sarà un circolo avente il raggio uguale a gu; se immagineremo adunque che un tal piano ruotando sulla sezione di lui col piano su cui insiste la ellisse $rlqn$ si adatti a quest' istesso piano, si avrebbe nell' arco hu parte della sezione di esso coll' ellissoide, ed in hp il semiasse del contorno apparente.

162. *Della prospettiva di un' ellissoide avente l'asse inclinato al piano geometrico* (Fig. XXXII).

La posizione dell'ellissoide voluta dall'enunciato porterebbe un' operazione alquanto intralciata, se, seguendo il metodo incominciato, si volesse dedurne la prospettiva dalle projezioni del contorno apparente di lei, perchè il piano verticale passante pel punto di vista e segante l' ellissoide non avendo nel caso in quistione una determinata posizione riguardo all' asse, una tale sezione non potrebbe rinvenirsi che con operazioni lunghe e nojose. Essendoci noi prefissi di prendere sempre il cammino più breve per giugnere al conseguimento di una prospettiva, ap-

poggeremo l'operazione per questo caso al seguente ragionamento. Immaginiamo varj piani seganti l'ellissoide, ed immaginiamo fatta la prospettiva di essa e delle sezioni suddette, egli è evidente che tutte le prospettive di queste avrebbero i loro punti estremi nella curva che è prospettiva del solido, cioè la prospettiva di esso sarebbe un'ellisse tangente a quelle rappresentanti le sezioni accennate, e però trovate le prospettive di tali sezioni sarebbe subito tracciata anche quella dell'ellissoide. Ciò posto resterebbe a scegliersi quelle tra le sezioni di cui si parla, le di cui projezioni riescano più facili a descriversi. Essendo queste evidentemente quelle che constano di rette o circoli, noi vedremo nella dimostrazione che seguita con quale artifizio può ciò ottenersi.

Rappresenti $ACBD$ l'ortografia dell'ellissoide fatta su di un piano verticale parallelo al suo asse indicato in AB, e sia XX' la fondamentale ortografica. Col centro in F mezzo di AB e con un raggio eguale ad FD semiasse minore della projezione $ADBC$ si faccia l'arco circolare LD, e si abbassi la Lm perpendicolare ad XX' tangente all'arco suddetto e terminante su di una retta ab parallela ad XX'. Dalla sezione M della Lm coll'ortografia si conduca una NM passante per F, ed avendo da F segnata la perpendicolare Ff'', si faccia col centro in f' e raggio $f'm$ il circolo $fmf''n$, il quale rappresenterà la icnografia della sezione di un piano perpendicolare a quello ortografico della quale NM sarà l'ortografia.

Infatti non potendo essere la sezione di un piano con un'ellissoide che circolare od ellittica, ed essendo evidentemente i diametri spettanti alla sezione MN projettati nell'ortografia l'uno in F e l'altro in NM, e nell'icnografia l'uno in ff'' l'altro in nm, ed essendo pure evidente che $f'f''$ debba essere uguale a CD e che nm risulta pure eguale a CD, per essere la Lm distante dalla Ff'' quanto la metà di CD, così, avendo tale sezione i diametri dell'icnografia ad angoli retti e dell'egual dimensione, quest'ultima non può essere che un circolo.

Inteso questo si segnino altre rette VY, OP, parallele ad NM, e quante altre se ne volessero, che rappresenteranno altre sezioni simili alla prima, cioè danti icnografie circolari, per cui i punti V, Y; O, P abbassati in v, y; o, p colle solite perpendicolari, coi diametri vy, op si descriveranno due altri circoli, che saranno le icnografie delle corrispondenti ortografie VY, OP. Gioverà avvertire che per l'esattezza dell'operazione prospettica sarà sempre utile il trovare i due punti R, R' di contatto di due tangenti orizzontali guidate alla ortografia del solido, i quali avranno le loro icnografie sulla ab.

Con questi dati si trovi la prospettiva delle sezioni in discorso e dei punti di contatto R, R', e quindi si segni a mano una curva tangente alle prime e passante pei secondi che sarà la prospettiva del solido. A risparmio di fatica avvertiremo non essere necessario il segnare per intiero

la prospettiva delle sezioni, ma solamente quella porzione per cui un di presso debbe passare la prospettiva dell' ellissoide.

163. *Della prospettiva di un cilindro conterminato da due semisfere, ed avente l'asse orizzontale* (Fig. XXXIII).

Sia $A\ T\ V\ I\ V'\ T'$ la icnografia del solido, E il punto di stazione, $p\,e'''$, $r\,s$ due linee tra loro distanti quanto lo sono la orizzontale e la fondamentale prospettica, $v\,g$ una retta distante da rs quanto l' asse del solido si suppone distante dal piano geometrico, e finalmente indichino le punteggiate $T\,T'$, $V\,V'$ l' unione del cilindro colle due semisfere. Si tracci primieramente la $Z\,E'$ perpendicolare a $T\,V$, e da E si produca la $E\,E'$ parallela alla stessa $T\,V$, e preso un punto qualunque z sulla $v\,g$, si descriva col centro in esso il circolo $m\,v\,o$ con raggio uguale a quello delle semisfere, il quale rappresenterà evidentemente la projezione del cilindro su di un piano verticale che s' intendesse avere la sua icnografia in $Z\,E'$. Prendasi $v\,z'$ eguale a $Z\,E'$ e su z' s'innalzi la perpendicolare $e'\,z'$, si tracci la $e'\,z$ e fatto centro alla metà di questa, con raggio eguale alla metà della linea, si descrivano gli archetti q, o, i quali, come è noto, nelle loro intersecazioni col circolo daranno i punti di contatto di due tangenti guidate dal punto e' al circolo stesso. Ciò eseguito si segnerà la $Q\,Q'$ parallela a $T\,V$ e distante da E' quanto il punto q lo è da $e'\,z'$, e la $O\,O'$ distante pure da E' quanto o da $e'\,z'$. Le due $Q\,Q'$, $O\,O'$ saranno le

icnografie del contorno apparente del cilindro (§ 74 e 77), e le sue altezze sul piano geometrico si rileveranno dalla distanza dei corrispondenti punti q, o, dalla rs.

Per ciò che spetta alle due semisfere potrebbe servire di norma il processo del § 160, ma per la maggiore speditezza gioverà usare il metodo accennato nel § 73. S'incominci dal trovare i due punti di contatto A, A' di due tangenti guidate da E alla icnografia di esse, i quali punti saranno evidentemente distanti dal piano geometrico quanto l'intervallo tra le rette vg, rs. Da un punto B tra AT si segni la BE, poscia si traccerà il circolo duh col centro in z, od in qualunque altro punto della vg, e con un raggio eguale alla metà di BC. Prendasi ub eguale a BE, e su b s'innalzi la perpendicolare $e''b$, e quindi si trovino col metodo detto più volte i due punti di contatto d, h di due tangenti guidate da c'' al circolo ora segnato (Si osservi che una xy tracciata nel mezzo delle pe''', vg dividerà in due parti eguali tutte le rette i di cui estremi sono sulle pe''', vg). Le distanze dei due punti d, h dalla $e''b$ trasportate in ED, EH, determineranno in D, H due punti spettanti alla icnografia del contorno apparente, le di cui altezze si rileveranno dai corrispondenti d, h come si disse degli altri q, o.

Tale determinazione verrà a farsi chiara immaginando il piano contenente il circolo duh colle linee testè tracciate, trasportato ad insistere verticalmente sopra la BE in modo che il punto u cada sopra B ed il punto b sopra E.

Con un metodo eguale si procederà per le rette *E G*, *I E*, e si troveranno le incografie e le relative altezze dal piano geometrico di quanti si vogliono punti dei contorni apparenti delle due semisfere. Conducendo pei punti *Q*, *D*, *A*, *H*, *O*; *Q'*, *M*, *N*, *A'*, *O'* due curve, queste, unite alle rette *Q Q'*, *O O'* già tracciate, daranno l' intiero contorno apparente del solido.

Segnata con questi dati la prospettiva del sistema di linee di cui si ragionò orora, avrassi compiuta la prospettiva cercata.

164. *Del toro di una base quadrata* (Figura XXXIV).

Il contorno apparente di un tal solido consterà evidentemente di quattro lati delle superficie cilindriche che lo costituiscono, collegati insieme da porzioni degli spigoli ellittici formati dalle intersecazioni delle superficie suddette.

Rappresenti *V* la icnografia del toro, *Z* la ortografia effettuata su di un piano parallelo ad uno de' suoi lati, e sia il punto di stazione collocato in *E*. Si segni sul piano ortografico la orizzontale pure ortografica *e' e''*, la *x x'* perpendicolare alla prima e dividente per metà l' ortografia, e la *b v* passante pei centri dei semicircoli che la conterminano. Pel centro *X* dell' icnografia conducansi pure due rette *U U*, *E' V* perpendicolari ai lati della medesima, le quali riterremo rappresentare le icnografie di due piani verticali seganti il toro, ma siccome tali sezioni risultano evidentemente eguali alla ortografia, così le supporre-

mo rappresentate dalla stessa. Si conducano per E le due EE', EE'' perpendicolari, la prima ad $E'V$ la seconda ad UU, e prese xe' ed xe'' eguali rispettivamente ad EE', EE'', si determinano i punti di contatto di quattro tangenti condotte dai due punti e', e'' ai due semicircoli dell'ortografia, e siano tali punti di contatto $d, c; a, b$. Segnate le quattro punteggiate $D'D$, $C'C$; $A'A$, $B'B$, distanti ordinatamente dalle $E'V$, UU come lo sono i punti $d, c; a, b$ dalla xx', saranno tali linee le icnografie di parte del contorno apparente del toro. Le obbiettive di queste rette saranno poi, come è evidente, distanti dal piano geometrico quanto i punti relativi $d, c; a, b$ lo sono dalla fondamentale ortografica. Le icnografie delle rimanenti parti del contorno medesimo sono le rette $B'D$, $D'A$; $A'C$, BC'.

165. *Del toro di base circolare* (Fig. XXXV).

Sia A l'ortografia, B l'icnografia, C il di lui centro, ge la orizzontale ortografica, E il punto di stazione, ed ex una verticale dividente in due parti eguali la ortografia. Dividasi la icnografia in quattro parti eguali colle ME, $O'O$ incontrantesi ad angoli retti nel centro C. Si segni col diametro CE l'arco circolare $G'GE'E$, e dai punti G, E' e quanti altri se ne volessero fra $CE'E$, si segnino delle linee passanti per C e dividenti l'icnografia, indi si trasporta l'intervallo CG in cg' oppure cg che è lo stesso, l'intervallo CE' in ce' e CE in ce. Da ciascuno dei punti g, c, e', e si condurranno due tangenti ai semicircoli dell'ortografia, ovvero si

determineranno i punti di contatto col metodo noto, e sieno questi g'', l, m, n, o, h, i. Si prenda quindi la distanza di questi punti dalla cx e si trasporti sulla corrispondente linea in CL, CM, CN, CO, CH, CI. Riguardo all'intervallo CG si osservi che essendo gc eguale a CG, come dicemmo, la tangente gg'' risulterà verticale, e il punto di contatto g'' sarà sulla orizzontale $g''p$ che divide per metà l' ortografia, e distante da cx quanto lo stesso intervallo CG.

Pei punti M, L, N, O, G, H, I passar debbe la icnografia del contorno apparente del toro, e gli obbiettivi di questi punti sono distanti dal piano geometrico, quanto i corrispondenti punti di contatto m, l, n, ecc. lo sono dalla fondamentale, come si disse nei casi analoghi. Trasportando CO in CO', e dai punti L, N, H, segnando le LL', NN', $H'H$ parallele ad OO' ed in modo che siano divise per metà dalla MI, avransi, insieme a G' analogo di G, altri punti per compiere l'intiera icnografia. La distanza degli obbiettivi dei punti ora accennati dal piano geometrico, si rileva pure rispettivamente dai punti di contatto di cui si è già fatta menzione. Sarà utile l'osservare che i punti G, G' corrispondono a quelli di contatto di due tangenti guidate da E alla icnografia del toro, e che perciò nella prospettiva daranno i punti più lontani dal mezzo di essa, cioè i punti di contatto di due tangenti verticali.

Per conoscere la ragione dell' operazione or ora fatta, s'immagini che le rette ME, LE', NG,

O′ O sieno projezioni di altrettanti piani verticali
nsistenti sul piano icnografico e seganti il toro, e
si rifletta che le sezioni ora dette sono uguali alla
ortografia di esso, come facemmo in casi analoghi.
Inoltre è proprietà del circolo che tutte le rette
guidate dalle estremità di un suo diametro ed
unentesi alla circonferenza sono fra loro perpendicolari, e perciò una retta che s'intendesse guidata da E ad E' sarà perpendicolare ad LE, ed
un' altra che s'intendesse guidata da E a G sarà
perpendicolare a NG, quindi saranno i punti
g, c, e', e projezioni del punto di vista sui piani
supposti insistere sopra ME, LE', ecc. e però pel
§ 74 i punti di contatto delle tangenti condotte
dai suddetti punti g, c, ecc. alla ortografia del toro, determineranno tanti punti spettanti al contorno apparente.

166. *Di una scozia di base circolare* (Figura XXXVI).

Il contorno apparente di questo solido, per
ciò che spetta alla superficie concava di esso, viene generalmente coperto in gran parte dalla prospettiva del suo listello superiore, molto più se il
punto di vista trovasi ad una discreta distanza dal
piano geometrico. Noi daremo in questa figura la
icnografia del precitato contorno considerando la
scozia diafana onde scorgerlo per intiero. La spiegazione dell' operazione corrispondente si rileva
da quella dell'antecedente figura, avendo per ciò
contraddistinte le linee ed i punti analoghi colle
stesse lettere.

Gioverà però avvertire, 1.° che i punti *G*, *G'* riuniscono le condizioni dei *G*, *G'* dell'antecedente figura, eccettuato che invece di essere le icnografie dei punti più distanti dal mezzo della prospettiva, quivi invece lo sono dei più vicini. 2.° Che guidando da *E* una tangente alla porzione di curva *L N O'*, il suo punto di contatto ed analogo dalla parte opposta rappresentano quelli più lontani dal mezzo della prospettiva stessa dalla parte inferiore della scozia. 3.° Che guidando una tangente alla porzione di curva *I H G*, il suo punto di contatto ed analogo dalla parte opposta rappresentano i punti più lontani dal suddetto mezzo, dalla parte superiore di essa scozia. 4.° E finalmente che la porzione di curva *R M R'* compresa fra i punti *R*, *R'* ove le tangenti spettanti ai punti di contatto *G*, *G'* segano la icnografia in discorso, non potrà mai esser visibile agli occhi del riguardante.

167. Termineremo in questo luogo l'esposizione delle regole per disegnare una qualunque prospettiva fatta su di una sola parete, notando le circostanin cui potranno essere adoperate le varie operazioni testè indicate, onde determinare le prospettive delle linee curve e dei solidi di superficie continua: e primieramente gli esempj delle Figure XXIV, XXVII e XXVIII, porgendo il mezzo di trovare gli assi delle prospettive dei circoli, potrebbero riescire utilissimi ai pittori da teatro, laddove nelle loro opere in grande sogliono usare in casi simili de' metodi laboriosi e talvolta ine-

satti, imperocchè potendosi in questo caso rinvenire i fochi della ellisse, la di lei periferia ottenuta col mezzo della funicella appiccata a questi, nel modo che a ciascuno è noto e che si vedrà nell' App. II, porgerebbe sicuramente più facilità ed esattezza nell'ottenimento della prospettiva di cui si ragiona. Parimenti gli esempj delle Fig. XXV, XXVI e XXIX, ove si rinvengono i diametri conjugati, potrebbero essere di utile agli stessi pittori teatrali, specialmente quello della Fig. XXVI, pei loro archi in grande, servendosi di uno strumento analogo a quello che dimostreremo nell' App. I per una consimile operazione, oppure trovandone gli assi mediante il processo indicato nell' App. II, e servendosi di una funicella come di sopra si disse. I metodi delle Figure XXII, XXIII, XXVIII e XXIX, insegnano come si tragga profitto dalla uniformità e dalla regolare disposizione degli obbiettivi, come sarebbe la prima per le colonne aventi gli assi nel medesimo piano verticale, la seconda per gli archi esistenti pure su di un piano verticale, e finalmente le ultime due per tutte quelle prospettive di circoli esistenti su piani orizzontali, ed i di cui centri si trovano su di una medesima verticale, come lo sono le cornici, i zoccoli, e generalmente tutte le sagome negli edifizj di forma circolare. La Fig. XXIX serve poi principalmente a porre sott'occhio la pendenza che accade nella prospettiva di un solido circolare, quando la linea del taglio non è situata come nella Fig. XXVIII.

Osserveremo pure che per il compimento dell' opera era d' uopo insegnare il modo di rinvenire la prospettiva anche di que' solidi di superficie continua, il di cui contorno apparente non viene indicato nè nella ortografia nè nella icnografia di loro, ma dipende dalla situazione del punto di vista. A ciò soddisfacemmo cogli esempj compresi dalla Fig. XXX alla XXXVI, avendo avuto di mira, nella scelta di essi, di prenderli da que' solidi che sono per lo più alla mano de' disegnatori, e nei quali il ritrovamento del contorno apparente sui piani elementari è la più spedita via per giugnere al conseguimento della loro prospettiva, se si eccettua la Fig. XXXII, la quale porge un esempiò anche sul modo di operare in que' solidi, la cui situazione irregolare renderebbe più lungo il sistema adoperato nelle altre.

Avvertiremo per ultimo, che nella prospettiva delle curve è sempre miglior consiglio il rinvenire que' punti che sono di contatto di una tangente di direzione nota, perchè in questi, oltre al determinarsi un punto per cui passar debbe la curva prospettica, si ha pure l' andamento della stessa curva in quel dato punto, che è quello della tangente medesima, per cui coll'appoggio di pochi di questi, può un occhio bene esercitato ottenere più precisione, di quella che può ricavarsi da un maggior numero di punti, a cui non sia legata la condizione che dicemmo.

CAPO IV.

DELLA COLLOCAZIONE PIU' OPPORTUNA DEL PUNTO DI VISTA E DELLA PARETE.

168. Se le prospettive si avessero da osservare dal punto di vista che servì di base alla loro descrizione, inutile renderebbesi questo capo, giacchè essendo allora il tutto nell' ordine naturale della visione, nessuna precauzione sarebbe necessaria nella collocazione dei due elementi in quistione, se si eccettua la scelta più opportuna per la veduta dell'obbiettivo, ma le combinazioni locali e l' uso stesso delle prospettive, si oppongono quasi sempre ad una tale circostanza, per cui lo spettatore, sia per necessità o per caso, trovasi il più delle volte fuori di una tale posizione, quindi è che le regole eseguite anche colla più scrupolosa esattezza sembrano talvolta difettose, ed anche con poca intelligenza eseguite, se il prospettico non ha a ciò preveduto, collocando la parete ed il punto di vista colle precauzioni necessarie, a far sì che la prospettiva riesca gradevole ed illusoria da qualunque punto la si osservi.

Essendo, come di già vedemmo, la prospettiva nient' altro che la sezione della parete con una piramide la cui base è l' obbiettivo stesso e vertice il punto di vista, egli è evidente, che collocandosi l' osservatore fuori di una tale posizione, essa non ha più la condizione testè detta, giacchè i raggi dall' obbiettivo all'occhio non percor-

rono più in questo caso una retta, ma fanno un angolo alla parete che gli svia dal cammino assegnatogli dall' operatore, per cui nell' illusorio allontanamento degli oggetti dalla superficie, il quale non può effettuarsi che in linea retta, perchè altra direzione non possiamo concepire ne' raggi visuali, l'obbiettivo sembra scostarsi dal luogo ove fu collocato dal prospettico, secondando la prospettiva immobile, la quale si costituisce in questo caso vera base invariabile di una piramide visuale che varia a seconda della situazione dell' occhio; ma dovendo l' obbiettivo in tutte queste varie situazioni essere rappresentato da una eguale prospettiva, la sua forma dovrà alterarsi, come si altera la piramide di cui si suppone esser esso la base. Osserva a cagione di esempio la prospettiva di un cubo, del quale vedansi due facce verticali; supporremo quella alla sinistra in iscorcio (j) e quella posta alla destra parallela alla parete. Sia collocato in primo luogo l' occhio nel giusto punto di vista, vedrai lo spigolo di mezzo rappresentarti un angolo perfettamente retto; scostati ora da questa posizione dirigendoti alla tua sinistra, il concorso spettante al lato pure sinistro sembrerà moversi verso la diritta, per cui l'angolo presentato dallo spigolo medio diverrà apparentemente più acuto, e viceversa diverrà più ottuso se collocherai l' occhio alla destra della vera posizione, allungandosi anche illusoriamente il lato in iscorcio che nella prima posizione sembrava più breve. Dunque rigorosamente parlando la prospettiva di

cui si ragiona potrà dirsi di un cubo se veduta dalla posizione che gli assegna la prospettiva, ma fuori di questa sarà l'immagine di parallelepipedi più o meno discosti dalla forma del vero solido rappresentato, quanto più o meno sarà distante l'occhio dal vero punto di vista. Sarà perciò la più congrua situazione dell' occhio e della parete, quella che in queste varie posizioni farà scorgere allo spettatore le forme dell'obbiettivo il meno che sia possibile dissimili da quelle che debbe rappresentare la prospettiva, cioè varierà meno la base della piramide visuale che poggia sopra l' obbiettivo.

Dalla collocazione del punto di vista dipende il movimento e l' effetto del quadro, riguardo agli oggetti che debbonsi vedere o nascondere, agli sporti più o meno voluminosi, alla veduta piuttosto da un lato che dall'altro dell'obbiettivo, al contrasto delle ombre, agli accidenti di luce, alle linee più o meno inclinate dell' oggetto, ed agli scorci più o meno allargati. Dalla posizione della parete ne nasce quella forma di prospettiva che ci presenta l' idea della proporzione vera degli oggetti, nel modo più o meno conforme a quello con cui ci vengono rappresentati giornalmente dall' esperienza. Le osservazioni che sono il soggetto di questo capo risguarderanno semplicemente la inclinazione delle linee più confacente all' uso ordinario delle prospettive, cioè di esser vedute da varj punti fuori di quello di vista, e la forma prospettica degli oggetti, in queste varie situazioni, più conforme alla loro reale rappresen-

tazione. Riguardo agli altri casi, la loro collocazione viene regolata dal genio dell' artista, a seconda delle circostanze e delle varie qualità degli obbiettivi che costituiscono il soggetto della composizione. Osserverò anche che un tale ragionamento non potrà a rigore applicarsi che ai soli oggetti di proporzioni e forme fisse e conosciute, o che abbiano nella prospettiva stessa un confronto continuato della medesima specie, perchè non potendo l' occhio formare un esatto giudizio riguardo alla collocazione dell' obbiettivo dalla di lui prospettiva, che appoggiato a certi dati cavati da nozioni certe che si hanno della cosa osservata, senza di tale nozione il pittore gode di una maggior libertà nella collocazione di questi due elementi, imperocchè essendo allora il giudizio delle forme che rappresenta la prospettiva non ad altro appoggiato che all' abitudine di vedere, questa dispone la situazione e la proporzione degli oggetti rappresentati nella mente dell' osservatore a seconda della illusoria loro apparenza, e questa situazione e proporzione potendo variare senza discapito della bellezza degli oggetti medesimi, la prospettiva può apparirci grata da qualunque luogo la si osservi. Di una tale libertà godono particolarmente i pittori di paesi, i di cui soggetti generalmente parlando non hanno nè forme nè distanze fisse, e perciò ancorchè fatte senza il sussidio di regole certe, le loro opere possono illudere da qualunque punto si osservino.

Della distanza del punto di vista.

169. Ci mostra l'esperienza che se il punto di vista viene collocato troppo vicino all'obbiettivo, le linee prospettiche s'inclinan di troppo e gli scorci si allargano in modo sgarbato, per cui ingrata ne risulta l'opera, e se invece il predetto punto visuale si allontana più di un certo limite, le linee prospettiche si avvicinan generalmente troppo al parallelismo e gli scorci riescono poco marcati, e quindi languida e monotona proviene la prospettiva. Infatti immaginiamo gli elementi principali disposti per eseguire una data prospettiva, ma che il punto di vista si mova lungo il raggio principale. Si avvicini in primo luogo questo punto alla parete, in tal caso tutti i concorsi delle rette obbiettive si avvicinerebbero al punto principale, e nel mentre la maggior parte di esse sarebbero troppo precipitate, altre potrebbero presentare una dimensione maggiore delle obbiettive (§ 70), ciò che renderebbe la prospettiva spiacevole a vedersi, perchè non conforme al modo con cui si presentano gli oggetti naturali, ove nessuna linea può mostrarsi maggiore della sua dimensione, anzi potrebbe darsi talvolta che la piramide visuale si allargasse a segno da oltrepassare il limite accordato dalla natura alla pupilla per vedere; e quindi da non potersi osservare la prospettiva dal suo giusto punto, che a stento o soverchio volgere o girare il capo. Immaginiamo in secondo luogo che il punto di

vista si discosti dall' obbiettivo, in tale caso tutti i concorsi, eccettuato quello spettante alle linee perpendicolari alla parete, si allontanerebbero dal punto principale, e perciò tutte le linee parallele dell' obbiettivo prenderebbero una direzione sempre più vicina al parallelismo anche sulla parete, a misura che più lontano si trova il punto di vista, e di più quelle perpendicolari alla parete si accorcerebbero, tendendo a confondere i loro estremi col punto d' incontro di esse, e perciò gli oggetti posteriori avvicinandosi alla dimensione dei loro simili posti anteriormente, farebbero scemare l'effetto dell' opera a cagione del poco movimento del quadro, e della vicinanza del disegno prospettico col geometrico. Impossibile però io reputo l' assegnare un limite al punto di vista, acciò le prospettive non riescano spiacevoli a vedersi, come impossibile è l' assegnare una regola comune a tutte le composizioni di un artista, giova però l'aver accennato la causa di un tale risultamento, acciò sappiasi, almeno prossimamente, conoscere lo spazio entro il quale è ristretta una tale collocazione, cognizione che viene poi consolidata nell'artista provetto, dalla pratica e dalla esperienza.

Prima però di sortire da un tale argomento, faremo un' osservazione relativa ad un caso particolare che può accadere nelle prospettive, cioè quando l'obbiettivo è composto di lati non paralleli, come sarebbe il tronco di una piramide o di un cono, i lati non paralleli di un poligono qualunque, o qualche altra cosa simile. In tale caso il

punto di vista dovrà sempre collocarsi più lontano del punto di unione dei prolungamenti dei lati predetti, imperocchè se il punto di vista esiste in un piano parallelo alla parete nel quale esista pure l' unione nominata, le linee prospettiche diverrebbero parallele (§ 67), e se il punto di vista è collocato anteriormente al predetto piano, i lati della prospettiva divergerebbero dalla parte in cui quelle dell'obbiettivo sono convergenti (§ 68), e nell' uno e nell' altro caso, la idea presentata dalla prospettiva non sarebbe conforme a quella che si avrebbe dall' obbiettivo.

Dell' altezza del punto di vista.

170. Egli è d' uopo in primo luogo riflettere che l'abitudine ha una gran parte nell'uffizio de' nostri sensi, e che però sempre più gradevole sarà una prospettiva, quanto meno si discosterà dal più frequente modo di vedere gli oggetti rappresentati dalla stessa. Egli è perciò che gli oggetti prospettici sono più a noi gradevoli quando le linee superiori sono più inclinate che le inferiori, perchè l'altezza dell'uomo essendo comunemente molto minore della metà della maggior parte degli oggetti medesimi, nell' osservare gli stessi in natura vede sempre più cospicue le soffitte che il piano che percorre.

Dopo una tale riflessione due cose debbonsi aver di mira nel situare l'altezza del punto di vista; la prima se la prospettiva serve di continua-

zione ad un oggetto di rilievo, come sarebbe un portico, un viale d'alberi che si volesse continuare prospetticamente, come pure quei comparti e finte di porte e finestre che servono di supplimento al rilievo nelle stanze, chiese e simili; la seconda se la prospettiva ha per semplice scopo un quadro qualunque. Nel primo caso l'altezza del punto di vista è sempre fissata all' altezza di un uomo situato nel luogo più comodo per la visione generale dell' edifizio, oppure nel luogo più frequentato di esso, il qual luogo nelle sale, chiese, e simili edifizj, è per lo più il mezzo delle stesse. Nel secondo l'abitudine di vedere ci prescrive che quest' altezza debba uguagliare l'altezza di un uomo, dedotta dalla scala annessa alle projezioni dell'obbiettivo che servirono alla descrizione della prospettiva, qualunque sia il luogo nel quale va collocato il quadro, a meno che circostanze particolari esigessero altrimenti.

Ed io non ignoro d' avere in questo caso contraria l' opinione di un autorevole scrittore di prospettiva (Eustacchio Zanotti), il quale vorrebbe che in tutti i casi i quadri dovessero esser fatti col punto di vista posto in quel luogo che la situazione del quadro e del riguardante richiede, la quale opinione, sebbene più favorevole all' effetto della pittura, non può assolutamente conciliarsi con altre circostanze che accompagnano l' uso e lo scopo di un quadro. E primieramente se il quadro è mobile, può trasportarsi da un luogo all' altro, passa da una mano nell' altra

a seconda delle vicende umane, ed in tutti questi casi non sempre si può avere un sito conveniente alla prospettiva di esso, ma bensì il quadro è obbligato a quel luogo che l' ornamento dell' edifizio richiede, ed in tale circostanza farà sempre più bene un quadro fatto con un punto di vista favorevole a varie posizioni, che quello limitato ad un dato sito. In secondo luogo sia il quadro stabile e sia questo collocato molto superiore all' altezza di un uomo, in tale caso il pittore non potrebbe esprimere nello stesso che gli oggetti collocati ne' suoi orli anteriori, il cielo e le soffitte, il resto internandosi nel quadro non potrebbe esser mostrato agli occhi di nessuno. Ora quale soggetto, quale argomento potrebbe esser trattato dal pittore con lode, vincolato ad una sì sterile circostanza? Supponiamo ciò non pertanto che da un qualche pittore ciò si effettuasse, e che la illusione del quadro fosse completa, in questo caso dovrebbe certamente presentarsi un'apertura nel luogo laddove è dipinto, e se quest'apertura non è una continuazione della simmetria dell' edifizio, quale sarebbe l' idea che produrrebbe un tempio, una battaglia, un paese, in un sito contrario all' ordine sì dell' edifizio che della natura delle cose? Bisognerebbe di buon grado rinunziare alla composizione di qualunque quadro di simil fatta, che è quasi dire, bisognerebbe che gli uomini rinunciassero alla pittura, per non esservi situazione plausibile onde collocarla.

Circa poi al buono o cattivo effetto de' quadri veduti fuori del suo giusto punto di vista, ne è giudice la giornaliera esperienza, e se questa non ci presenta cosa dispiacevole, io non veggo ragione di condannare ciò che in nulla nuoce. E non varrà a provare il contrario il paragone dello specchio proposto dal citato autore con tali pitture, mentre con un poco di riflessione si vedrà esser per nulla ad esse conveniente, imperocchè, se collocato questo specchio nella predetta situazione del quadro, niente degli oggetti posteriori lascerebbe vedere, *se non quando si faccia pendere lo specchio*, nel qual caso *il pavimento della casa sembrerà un piano inclinato, e tutto ciò che al detto piano è perpendicolare sembrerà inclinato, e però le persone staranno in atto di cadere;* nella pittura invece niente di questo succede, perchè le linee verticali non cambiano mai la direzione benchè i piani orizzontali sembrano inclinarsi, e perciò gli angoli retti ci appajono alla vista ottusi od acuti, a seconda della loro collocazione sotto o sopra la orizzontale, ma siccome i nostri sensi non agiscono solamente in modo meccanico, e l' ordine delle idee formato sulle cose naturali supplisce talvolta al difetto delle artificiali se di queste conoscesi l' intenzione, così l'immaginazione in questo caso ci solleva, quasi direi, all'altezza del punto di vista, e fa sì che senza una particolare riflessione, gli angoli nominati si presentano in quella misura che l' ordine della cosa ideata richiederebbe, e quindi gli oggetti non

ci sembrano deformi come il raziocinio ce li farebbe supporre. Se ciò non fosse, ben ristretto sarebbe il limite da potersi accordare allo spettatore fuori del punto di vista della prospettiva, e gli artisti potrebbero di buon grado rinunziare all'idea d'istruire e dilettare colle loro opere, non che di ornare con esse i tempj, le gallerie ed i teatri stessi.

Della collocazione della parete.

171. Benchè collocato l'occhio con tutte le cautele adattate pel buon effetto di una prospettiva, la situazione sola della parete può renderla deforme a segno, da non più ravvisarsi ciò che l'artista intese di esprimere. Immaginiamo ancora un cubo, sia desso veduto da un punto soddisfacente, e sia collocata in primo luogo la parete parallelamente ad una sua faccia, anzi per maggior chiarezza passi per la stessa, e sia questa posta alla destra del riguardante, mentre la sinistra sia in un conveniente scorcio. Chiamerò primo spigolo quello verticale posto alla sinistra del contorno apparente del cubo, secondo quello di mezzo, e terzo l'ultimo. Ciò premesso, egli è evidente che nella posizione ora nominata della parete, gli spigoli orizzontali della faccia destra resteranno orizzontali anche prospetticamente, e quelli della sinistra faccia concorreranno nel punto principale (§ 51). Ruoti ora la parete sullo spigolo 2.° distaccandosi dal 3.°, gli spigoli orizzontali corri-

spondenti a questi due cominceranno in simile caso ad aver il loro concorso, e quello degli altri ed il punto principale a distaccarsi e dirigersi, questo verso il concorso detto antecedentemente, e l' altro dalla parte opposta. Ora osservisi che i punti d' incontro degli spigoli orizzontali delle due facce, esisteranno sempre nella unione dello spigolo 2.° colla parete, e che questo resterà nella ruotazione che immaginiamo sempre dell' egual dimensione. Notisi pure che variandosi la situazione dei concorsi, anche le prospettive delle facce variar devono la loro forma, e che gli spigoli 1.° e 2.° debbono anch' essi cambiare di situazione, perchè varie sono le sezioni de' relativi raggi visuali colla parete ruotante, cosicchè le facce prospettiche del cubo potranno accorciarsi fino ad un certo segno e quindi allargarsi, di modo che seguitando la ruotazione della parete fino a confondersi colla faccia sinistra, questa diverrà della dimensione che avea prima la destra, e la destra ad avere gli spigoli orizzontali concorrenti nel punto principale. Notisi però che questa faccia prenderà una forma diversa di quella che avea la sinistra, a meno che il punto di vista esista in un piano passante per lo spigolo 2.° e quello diametralmente opposto del cubo.

Seguitando la ruotazione della parete, noi vedremo il concorso spettante alla faccia sinistra passare dalla sinistra alla destra, e viceversa quello del lato destro passare dalla destra alla sinistra, e nel mentre lo spigolo 3.° andrà ad impiccolirsi

eccessivamente, il 1.° si allargherà più del 2.°, anzi quando la parete si troverà parallela al piano costituito dai raggi visuali spettanti allo stesso spigolo 1.°, questi non potendo più segare la parete, porteranno la prospettiva corrispondente ad una distanza e dimensione infinita, per cui pure infinita sarebbe da questo lato la faccia del cubo. Quando poi la parete passerà pel punto di vista sparirà per intiero la prospettiva, e ricomparirà seguitando la ruotazione, sino che accada allo spigolo 3.° ciò che ora dicemmo dello spigolo 1.°, e con deformazioni analoghe tornerà la prospettiva nella primiera forma, quando la parete verrà a situarsi nella prima posizione. Ora in tante variate e strane forme, chi potrà mai rivvisare sempre nella prospettiva l'immagine di un cubo veduto da un sol punto di vista? La collocazione della parete è adunque più che non si crede della massima importanza pel buono effetto delle prospettive, perciò noi andremo ad indagare tra tante e varie situazioni, qual sia la migliore per ottenere lo scopo di cui si ragiona.

Per conoscere questo egli è d'uopo volgersi verso la natura, onde distaccarsi il meno che sia possibile dalla legge che essa ci prescrive nella veduta degli oggetti. In primo luogo noi abbiamo di già osservato (§§ 2, 3 e 4), che la visione di qualunque punto viene a noi trasferita in senso perpendicolare al raggio visuale, ed il giudizio delle altezze e delle distanze viene da noi formato dall'ampiezza del vertice della piramide visuale,

il quale negli oggetti di grandezza eguale è sempre minore a misura che gli stessi sono più lontani; per cui tutti si potrebbero riferire ad una superficie sferica, il di cui centro fosse il punto di vista, ed in questo caso i raggi visuali sarebbero tutti perpendicolari a detta superficie. Da un tale ragionamento si ricava, che nella prospettiva gli oggetti sempre meno differiranno dal vero, quanto più i raggi visuali saranno vicini all'angolo retto colla parete. Essendo una tale particolarità riservata al solo raggio principale, sembra determinarsi naturalmente, che la migliore situazione della parete sarà quella che avrà il raggio principale nel mezzo della primade visuale, ma siccome abbiamo osservato nel § 170 che l'abitudine di vedere è contraria ad una tale situazione media del raggio principale per rapporto all' altezza, così attenendosi per la collocazione del punto di vista a ciò che dicemmo in proposito più addietro, riferiremo l' osservazione fatta alle sole parti laterali della prospettiva, ove l'abitudine non può aver parte alcuna nè un ordine fisso nella visione. Concluderemo adunque, che la migliore disposizione della parete sarà quella che porterà la linea del taglio, base di un triangolo isoscele formato da essa e le linee visuali estreme della prospettiva, del quale la linea della distanza ne costituirà l' altezza.

Una tal regola però comunque generale possa essere, può avere le sue eccezioni nei casi che l'obbiettivo consti di figure rettangolari combinate

con altre circolari, o vicine alla forma di queste, come sono i poligoni di molti lati, e specialmente se questi s'innalzano isolati dalla figura rettangolare, come sarebbe un tempio con cupola o cosa simile, imperocchè, per evitare la pendenza della prospettiva, quando la fondamentale non è parallela all'asse della ellisse che la circonscrive, fa d'uopo prender norma da una tale necessità, poichè la figura rettangolare accordandoci uno spazio un poco più esteso nel collocamento della parete, la prospettiva generale riescirà più gradevole.

Egli è però vero che ciò non può ottenersi in que' casi, ove più figure circolari formano una prospettiva sola. Ogni colonna, per esempio, acciò non sia alterata nella forma, vorrebbe esser veduta colla parete parallela a quella corda obbiettiva che costituisce l' asse maggiore della ellisse, ma se molte di esse formano la costruzione di un edifizio, siccome in ciascuna cambia di direzione la predetta corda, così la parete non può servire al bisogno di tutte, e perciò va regolata colla prospettiva generale, a cui le parti devono essere necessariamente soggette, imperocchè in questo caso, o le linee sono chiamate dal bisogno, e l' occhio resta appagato quando vede una corrispondenza esatta fra le parti ed il tutto, o si possono con qualche temperamento adattare all' uso generale delle prospettive, per ottenere anche in queste parti un risultamento conforme al bisogno, come generalmente fanno i pratici di quest' arte.

Prima di abbandonare un tale argomento, faremo una osservazione sul caso particolare della parete posta parallelamente alle linee orizzontali obbiettive, situazione generalmente preferita dagli artisti per risparmio di fatica, conciliandosi essa con una certa facilità nelle operazioni grafiche, specialmente per chi opera ad occhio, ma che dovrebbe isfuggirsi il più che sia possibile, ove l' oggetto consti di figure circolari specialmente, per le ragioni che andremo ad accennare. E primieramente fu già da noi osservato, che le linee prospettiche, secondando l' abitudine con cui si presentano gli oggetti all' occhio, si adattano ai movimenti dello spettatore, come appunto accade di un ritratto dipinto cogli occhi rivolti verso chi lo eseguisce, che sembra osservare chi lo guarda in qualunque punto questo si trovi, quindi le linee prospettiche sembrano variare illusoriamente anch' esse il loro punto di concorso, a seconda della collocazione dell' osservatore, circostanza favorevole all'uso delle prospettive, perchè porge il mezzo alle stesse di secondare fino ad un certo segno e l' abitudine di vedere e la mente dei riguardanti: le sole linee parallele alla parete si mostrano restíe ad una tale illusione, perchè non avendo esse punto di concorso, non possono presentarsi che nella direzione invariabile della parete, e siccome una prospettiva non può essere composta semplicemente di tali linee, ma avvene delle altre concorrenti in un dato punto, così movendosi queste e restando immobili le altre, gli

angoli debbono alterarsi più che in qualunque altra disposizione della parete, e per conseguenza più deformi apparire gli oggetti rappresentati.

La scelta della disposizione della parete nel modo che dicemmo, può inoltre rendere deforme l'obbiettivo più che in qualunque altra posizione, quando questo consti di un intercolonio di qualche notabile lunghezza, imperocchè le regole prospettiche aumentano, come è noto, la larghezza degli oggetti cilindrici, ed inclinano le sezioni orizzontali di essi, a misura che le immagini si discostano dalla direttrice, e ciò succede nel maggior grado quando i centri di questi esistono su di una linea parallela alla parete, rendesi perciò indispensabile in questo caso, ed a quelli che esercitano la prospettiva è ben noto, il deviare dalle regole, adattandovi quel temperamento capace a ridurre il più che sia possibile il fusto delle colonne conforme alla proporzione vera, ciò che non può ottenersi che alterando in qualche parte le basi ed i capitelli, non sempre senza difficoltà, e qualche volta con visibile sconciamento nelle loro forme. Difetti che vanno scemandosi a misura che la direzione dell'intercolonio si avvicina alla perpendicolare colla parete, situazione nella quale un tale inconveniente è sempre minore. Di più, variando nelle situazioni non parallele alla parete le colonne la loro apparente grandezza, riesce sempre più difficile all'occhio un confronto esatto delle proporzioni comuni, ciò che porta evidentemente meno deformità nella inevitabile altera-

zione delle proporzioni, e più facilità nell' adattarvi quel temperamento di cui si ragionò superiormente, se mai questo fosse necessario.

Resta ora da considerarsi quale influenza aver possa sulla prospettiva, la maggiore o minore distanza della parete dal punto di vista. A questo scopo immaginiamo fatta la prospettiva di un obbiettivo qualunque, ed immaginiamo che restando il tutto à suo posto un' altra parete si muova parallelamente alla prima, e che in ciascuna posizione di questa sia sempre su di essa descritta la prospettiva del summentovato obbiettivo, evidentemente tutte queste varie prospettive potranno pure considerarsi prospettive anche di quella segnata sulla parete stabile, e perciò simili a questa (§ 71), cioè nessuna diversità scorgerassi in loro, se si eccettua la maggiore o minore dimensione.

Avvertimento finale.

172. Benchè le cautele accennate nel decorso di questo capo possano essere di vantaggio all'ottenimento di una perfetta prospettiva, dovrà però sempre il pratico tracciar prima di tutto le principali linee del contorno apparente della medesima, ed anche qualcun' altra delle principali dell' oggetto se abbisognassero, per poter giudicare dell'insieme della di lui prospettiva: senza di una tale precauzione accaderà sovente di dover cancellare ben più linee che le accennate della sua operazione già innoltrata, o di essere poco soddisfatto della stessa condotta al termine.

SEZIONE II.

CAPO I.

DELLA PROSPETTIVA ESPRESSA SU PARETI SEPARATE

173. Abbiamo di già veduto nella Sez. I, che la prospettiva di un corpo su di un dato piano, non è che l'intersezione del piano istesso colla piramide visuale che ha base su detto corpo e vertice nel punto di vista, ed abbiam pure veduto le ragioni, per cui detta immagine produce sulla retina una sensazione eguale a quella che sarebbe prodotta dall'obbiettivo. Richiamato così il detto alla mente, sara facile il concepire, come se segherassi la detta piramide visuale con una serie di piani, i quali non si coprino intieramente l'un l'altro, e che su ciascuno di essi vengano delineate le loro intersezioni colla suddetta piramide visuale, sarà come si disse facile il concepire, che il complesso di esse intersecazioni produrrà all'occhio collocato nel vertice della piramide, una sensazione pari a quella che sarebbe prodotta dall'oggetto. Tale sistema d'immagini descritte su piani diversi, costituisce l'artifizio della prospettiva su pareti separate.

174. Da quanto si è detto si vede, che qualunque sia la distanza fra un piano e l'altro, purchè

l'occhio sia collocato nel punto di vista, la sensazione sarà identica a quella prodotta dall'oggetto, ma chiaramente apparisce anche, che le sconciature di cui abbiamo parlato nel Cap. IV della Sez. I, vanno in questo sistema aumentandosi, poichè oltre a quelle risguardanti i piani di per sè, vi si aggiungono le provenienti dalla unione di essi, tra le quali le più sensibili e più difficili ad evitarsi sono quelle, che per lo scostarsi dell'occhio dal punto di vista, andandosi ad accrescere o diminuire le parti visibili dei piani posteriori, per essere più o meno coperti dagli anteriori, le linee che prima erano continuate riescono spezzate, e gl'intervalli tra gli oggetti dipinti sulle varie pareti alterati nelle loro proporzioni.

175. La prospettiva di cui si ragiona può essere di due specie, la prima è quella che non è obbligata a nessun essere vivente, e in cui se degli uomini o degli animali debbono figurare, vanno dipinti, e quindi si possono anche questi assoggettare al dominio della prospettiva. Tali a cagione di esempio sono le prospettive usate ne' così detti *sepolcri*, *presepj*, e simili. Questa specie di prospettiva chiameremo semplicemente *prospettiva a più pareti* o *poliedrica*. La seconda specie poi è quella in cui debbono figurare e muoversi esseri viventi e d'inalterabile proporzione, come accade ne' teatri, e che perciò distingueremo col nome di *prospettiva teatrale*. In questa oltre agli inconvenienti accennati più addietro, quello dee aggiungersi prodotto dal confronto degli uomini

colle tele sceniche, i quali percorrendo lo spazio tra piano e piano, varia ne risulta la proporzione tra essi e gli oggetti dipinti, il che scema l'effetto della prospettiva, se il pittore non sa in questa secondare una tale circostanza, giacchè il rilievo prevale evidentemente all'altra in materia d'illusione. La prospettiva teatrale ha inoltre il legame, che, dovendo gli attori entrare nella scena e sortirne, è d'uopo di combinare l'obbiettivo in modo che le aperture riescano naturali sì nella composizione che nella dimensione, acciocchè nulla siavi d'incongruente. I due casi che ora accennammo sono per lo più trascurati nella dipintura delle scene, anzi credendosi generalmente tali difetti inevitabili, i più degli *spettatori si rendono un conto sì poco esatto di quanto vien loro mostrato, che trovano naturalissimo il vedere gli attori andare e venire in mezzo a quinte, la cui unione rappresenta un parete continua* (*), e poco loro importa che i medesimi attori varchino lo spazio di dieci o venti braccia con un passo, e che tocchino colla testa non solo le porte di grande dimensione, ma anche che sorpassino talvolta i tetti delle case non che i campanili medesimi. La prospettiva teatrale è lo scopo principale di questa Sez., ma prima di entrare nella particolare disamina di essa, accenneremo ciò che nella formazione delle due specie abbisogna, e le variazioni che nel carattere d'entrambe sono necessarie, onde

(*) Schlegel, *Corso di lett. dram.*, Tom. II, p. 71.

rendere l'opera più che sia possibile priva di que' difetti, che accompagnano necessariamente le prospettive fatte su di un punto di vista e vedute da altri punti.

176. Le prospettive su pareti separate possono esser composte: 1.° Del *telone*, il quale è la parte primaria della scena e chiude verticalmente il fondo di essa. 2.° Dei *rompimenti*; questi sono quelle tele pure verticali, segate secondo l' andamento del contorno apparente dell' obbiettivo che rappresentano, e generalmente occupano la parte media della scena tra il telone ed il punto di vista. 3.° Delle *quinte*, le quali sono quei piani laterali che servono a continuare i lati della scena, onde chiudere i traguardi degli spazj di fianco, e nascondere l'interno del palco che loro corrisponde. 4.° Delle *arie*; queste sono tele sospese verticalmente, generalmente nella parte superiore delle quinte, e servono a contenere la prospettiva de' soffitti, delle sale, ecc. e chiuderne i relativi traguardi. 5.° E finalmente del *palco*; questo è un piano inclinato, che si suppone rappresentarne uno orizzontale, e costituisce il piano a cui appoggiansi tutti gli oggetti espressi sul telone, rompimenti e quinte.

177. Tutte queste tele si debbono considerare come altrettante pareti, che, prese separatamente, potrebbero esser soggette alle regole che insegnammo nella Sez. I; ma siccome la loro disposizione contribuisce moltissimo ad accrescere o diminuire l' illusione dell' opera, così andremo ad indagare

quale sia la più congrua per lo scopo di cui si tratta, onde scansare quegli inconvenienti che ne emergerebbero situandoli senza le necessarie precauzioni. Stabilita l' inevitabile condizione che tutte queste pareti debbano segare la piramide visuale, e che gli oggetti rappresentati dalle pareti verticali debbano essere appoggiati al palco, si vede subito che l'inclinazione di questo determinar deve la situazione delle altre, acciò la reale sezione di queste col palco, coincida colla corrispondente prospettiva di quella parte dell' obbiettivo che poggia sul piano orizzontale. A questo scopo immaginiamo un piano perpendicolare a tutte queste pareti, e sia il primo destinato a ricevere le varie projezioni che ad una tale dimostrazione abbisognano. Rappresenti in primo luogo $a\ s$ (Fig. XXXVIII) quella del piano geometrico, $v\ r$ quella del palco, e quella del punto di vista, ed i luoghi de' punti p, f, g, h siano le projezioni delle icnografie di alcuni pilastri, tracciate sul piano geometrico suddetto. Si segnino coi punti p, f, g, h ed e le rette ep, ef, eg, eh; evidentemente le intersezioni di queste colla $v\ r$, determineranno in p', f', g', h' le projezioni delle prospettive rappresentanti le icnografie sopraccennate, che, per la ragione detta antecedentemente, si potranno pure considerare projezioni delle sezioni di altrettante quinte col piano del palco, destinate a ricevere le prospettive separate dei pilastri in quistione; e perciò sui punti p', f', g', h' innalzate le $q\,p'$, $t\,f'$, $m\,g'$, $n\,h'$ perpendico-

lari alla $a\,s$, rappresenteranno queste le projezioni delle corrispondenti quinte sopradette.

178. Benchè sembri per sè stessa chiara la ragione di una simile operazione, pure, per vieppiù rendere manifesti gli inconvenienti che accadono all'operatore situando le quinte a capriccio, faremo un particolare esame su ciò che ne emergerebbe collocando le stesse fuori della posizione che gli abbiamo assegnata. E primieramente sia a cagion di esempio la quinta $t\,f'$ nella situazione $d\,o$; in questo caso la prospettiva del punto projettato in f cadrebbe in f'', e dovendo necessariamente la quinta poggiare sul palco, ne nascerebbe lo spazio $f''d$ il quale rappresenterebbe la prospettiva di porzione del piano compreso fra $d\,f'$, quindi la prospettiva del vero punto d'appoggio sarebbe sollevata sul palco, e non varrebbe a nascondere ciò il dipingere con tutte le regole la continuazione del piano del palco corrispondente a df', perchè la visibile sezione dei due piani in quistione, il distacco del palco dal lembo della quinta corrispondente ad f'', e nella prospettiva teatrale, l'attore che percorrendo lo spazio projettato in $d\,f'$ vedrebbesi nascondere dietro il corrispondente spazio prospettico, non che all'oggetto medesimo, quando dovrebbe passargli davanti, tutto infine smentirebbe il male adattato artifizio del pittore nel caso di cui si ragiona.

179. Immaginiamo ora la quinta projettata in $d'\,o'$; se nel primo caso le difficoltà di cui parlammo si oppongono alla illusione per un verso, in

questo ne insorge un' altra non meno fastidiosa e forte, perchè cadendo allora la prospettiva rappresentata in f' nel punto f''', inferiore alla $v\,r$, verrebbe a mutilarsi l'oggetto quanto è lo spazio compreso fra $d'f'''$.

180. Stabilito in questa guisa che il luogo d'appoggio dell' obbiettivo sul piano geometrico riferito al piano del palco inclinato nel modo che vedemmo, determinar debbe anche la posizione della parete sulla quale si vuole esprimere detto obbiettivo, è d'uopo concludere che la pendenza del palco è la sola regolatrice della situazione delle pareti che ad esso appoggiansi, ma da una tale considerazione chiaramente apparisce, che una tale pendenza non può essere regolata da una legge costante, ma bensì dal genio o dicasi anche dal capriccio del pittore o dell' architetto che ne presiede alla costruzione, ed in fatti tanto i teatri quanto qualunque altra prospettiva a più pareti differiscono essenzialmente tra loro in tale pendenza, che impossibile sarebbe il conciliarne un canone che servir potesse di norma agli architetti nella costruzione del palco.

181. Determinata in tal modo la situazione delle diverse pareti che compongono una scena, come anche le linee del taglio corrispondenti, e le rispettive fondamentali (le quali saranno projettate evidentemente nei punti q', t', m', n', prodotti dalla unione della $a\,s$ colle $q\,p'$, $t\,f'$, $m\,g'$, $n\,h'$ prolungate), sarebbe facile il concepire il modo di operare per tracciarne la prospettiva, se si volesse per

ciascuna di esse seguire unicamente il metodo insegnato nella Sez. I, ma vi sono delle regole dipendenti dalla corrispondenza che le linee espresse sulle diverse pareti hanno tra loro, che nella esecuzione pratica ne agevolano la condotta, perciò andremo ad indagare quali sieno queste regole, e dove e quando giova il servirsene. Riflettendo però che la prospettiva poliedrica può uniformarsi in tutto a quella del genere teatrale, e che solamente in questa si affacciano delle difficoltà non comuni all' altra, e che sembrano a prima vista insuperabili, fermeremo la nostra particolare attenzione a quest' ultima, onde cercare di svilupparne il carattere, e conoscere fin dove essa può uniformarsi col bisogno delle scene.

Della prospettiva teatrale.

182. Prima di entrare nel particolare esame di essa, egli è d'uopo porre sott' occhio al lettore non solo tutte le circostanze che accompagnano l'uso e la costruzione del palco scenico, ma anche le opinioni generalmente ricevute come teorie circa la pratica di tale prospettiva, fin dove credesi possa questa prestarsi ai bisogni del teatro, e con quali principj viene generalmente eseguita. Circa l'uso egli è evidente, che essendo destinato il palco al passaggio di uomini, bestie, e ciò che appartiene direttamente a questi, come sedie, tavoli, carri, ecc. richiedonsi spazj praticabili e proporzione analoga; riguardo poi alla costruzione, si vede che

determinata una volta la pendenza del palco e lo spazio fra le fessure nelle quali scorrono le quinte, non si può più nulla alterare, e quindi il pittore dovrebbe regolarsi a norma di tali circostanze nella scelta degli obbiettivi, e nella esecuzione della corrispondente prospettiva, ma la speditezza con cui tali opere vanno generalmente eseguite, non che l' uso stesso del palco, si oppongono direttamente ad un tale calcolo, e perciò dai pittori viene trascurata una tale circostanza, ed in questa guisa le scene riescono più adattate al bisogno.

183. Circa la prospettiva egli è opinione generale che, presa questa da una parete all'altra, debba degradare nel discostarsi dal punto di vista, secondando una legge analoga a quella espressa su di una superficie sola: non riflettesi però che ciò che produce la illusione non è la materiale inclinazione delle linee, ma l'esatta osservanza di quelle leggi atte a produrre sulla retina una sensazione identica a quella che produce l' obbiettivo, ciò che si otterrà sempre, qualora i raggi visuali spettanti alla prospettiva, conservino una direzione identica a quelli del corrispondente obbiettivo; ora mostrerò che nel caso di cui si ragiona, senza opporsi ad una tal legge, la prospettiva può variare in più maniere essenzialmente diverse l'una dall'altra, cioè, può ingrandire tra parete e parete nel discostarsi dal punto di vista, può riescire di una dimensione costante, può diminuire come un di presso diminuisce su di una

sola superficie, e può anche mescolare tutte e tre queste combinazioni insieme. Rappresentino AB, CD, FG (Fig. XXXIX) una serie di pilastri, le di cui prospettive sieno sulle corrispondenti pareti espresse in ab, cd, fg; rappresentino E il punto di vista, ed EA, EB; EC, ED; EF, EG i relativi raggi visuali. Egli è evidente che a cagione dei triangoli simili Eab, EAB; Ecd, ECD, ecc. si avrà $Eb:ba::EB:BA$; $Ed:dc::ED:DC$; $Eg:gf::EG:GF$. Ora sia in primo luogo la ragione di Eb con EB maggiore di quella di Ed con ED, e la ragione di Ed con ED maggiore di quella di Eg con EG; egli è chiaro che sotto questa condizione parimenti la ragione di ab con AB sarà maggiore di quella di cd con CD, e la ragione di cd con CD maggiore di quella di fg con FG; dunque in questo caso le prospettive andranno diminuendosi a misura che si discosteranno dal punto di vista. Supponiamo ora inversamente, che la ragione di Eb con EB sia minore di quella di Ed con ED, e così questa di Ed con ED rispetto ad Eg con EG: egli è pur chiaro che sotto una tale condizione sarà ab minore di cd e cd minore di fg; dunque le prospettive andranno aumentandosi a misura che si discosteranno dal punto di vista. Saranno poi queste prospettive di una dimensione costante, qualora costante si supponga la ragione che dicemmo, oppure quando le varie pareti si supporranno distanti dal punto di vista, quanto lo sono i corrispondenti obbiettivi,

cioè quando l' obbiettivo di ciascuna parete, essendo un piano parallelo alla stessa, questa e quello si confonderanno insieme. Egli è poi evidente che se si mescoleranno questi diversi rapporti insieme, egualmente di varie grandezze risulteranno le prospettive, e siccome tutte queste pareti segano una medesima piramide, così egli è pur chiaro che le prospettive delle linee, quantunque passino da una parete all'altra, non potranno mai presentarsi spezzate, quando non lo sieno obbiettivamente, a colui che si trova collocato nel giusto punto di vista.

184. È generale opinione inoltre che la degradazione delle quinte contribuisca ad accrescere illusoriamente lo sfondo del palco, anzi viene insegnato da autori che hanno qualche credito fra gli artisti, che più le quinte anteriori avranno la loro prospettiva imponente e grande rispetto a quella delle posteriori e del telone, più aumenterassi l' illusorio ingrandimento della scena. Se facciam mente all' esperienza si vede però smentita in pratica una tale teoria, mentre se ciò fosse non vi sarebbe cosa più comune che il vedere delle scene spaziosissime, ma invece veggonsi prospettive anguste e strette chiuse da quinte colossali, ed una scena spaziosa scappa fuori al pittore senza avvedersene, laddove quinte proporzionate usò nella prospettiva, ed in fatti se i confronti sono il più proprio e sicuro mezzo per giudicare di una dimensione, certamente la scena si mostrerà sempre più ampia e grande quanto meno sarà ingombrata d' oggetti, e quando questi saranno pic-

coli in confronto di essa. Le quinte grandi e colossali, debbono necessariamente impiccolire lo spazio del palco e la dimensione del telone su cui cade la principal parte della prospettiva, quindi la scena risulterà sempre più meschina, quanto più imponenti e grandi saranno le quinte che la circondano.

185. Dimostrerò per ultimo, che il maggiore o minor numero delle quinte non debbe riguardarsi come capace ad ingrandire l' obbiettivo che è il soggetto della scena, ma bensì lo spazio praticabile e la illusione. Infatti supponiamo dato un edifizio da dipingersi prospetticamente; in tale caso tutto l' artifizio del pittore consisterà nel presentare su di un' area limitata da tele quella contenuta dalla pianta di esso, e però servi al suo scopo una o più pareti, avrà sempre ottenuto l'intento, quando abbia assoggettato alle leggi prospettiche tutte le parti che compongono l'edifizio; dunque qualunque sia il metodo adottato, non potrà mai presentarsi dal pittore un'area maggiore o minore di quella che è necessaria per la regolare distribuzione di esse parti, ma riguardo allo spazio praticabile ed alla illusione, egli è cosa troppo evidente, che avvicinandosi la prospettiva a più pareti al rilievo sempre più, quanto più sono le parti separate di essa, debbe per conseguenza partecipare del carattere dell' obbiettivo più o meno, secondo che più o meno si avvicinerà alle parti di cui questo è composto, nella distribuzione delle corrispondenti pareti.

186. Dimostrata l'erroneità delle principali opinioni riguardo al carattere della prospettiva teatrale, ci sforzeremo, per quanto sarà possibile, di rettificare le idee, e d'internarsi nell'essenza di essa, onde scorgere se per avventura si possa qualche passo progredire verso la più perfetta esecuzione della stessa. Essendo il palco, come vedemmo, il regolatore della situazione delle altre parti, cominceremo dall'indagare quale sia la forma di esso più propria pei bisogni del teatro.

Del palco scenico.

187. Prenderemo per base del nostro ragionamento una cosa negletta da tutti gli altri autori che trattarono o praticarono la prospettiva teatrale, anzi creduta difetto inevitabile delle scene (*); la proporzione costante tra gli attori e la prospettiva delle stesse. Non potendosi dagli attori impiccolire il loro volume onde secondare le leggi prospettiche, egli è d'uopo che queste si adattino a secondare una tale circostanza. Abbiam già veduto nel § 183, che le leggi suddette non si mostrano restìe ad un siffatto bisogno, dunque, dipendendo la prospettiva dei piani delle quinte e dei rompimenti dalla inclinazione del palco, principieremo dall'indagare quale sia la più propria per lo scopo di cui si ragiona. Facendo mente alla inclinazione della *vr* (Fig. XXXVIII) rappresentante, come ve-

(*) Schlegel, *Corso di lett. dram.*, *Tom.* III, *p.* 197.

demmo, la projezione del piano del palco, si vede chiaramente, che più questa sarà inclinata rispetto alla *a s*, più le prospettive di obbiettivi d'uguale dimensione eseguite sulle quinte, andranno mano mano diminuendosi nel discostarsi dal punto di vista, e viceversa più le prospettive di queste si approssimeranno alla dimensione degli obbiettivi, quanto più la *v r* sarà prossima a confondersi colla *a s*: ma il bisogno del teatro è quello di avere una prospettiva la quale mantenga una proporzione costante cogli attori che debbono percorrere il piano del palco, sembra adunque deciso che le prospettive espresse sulle quinte e sui rompimenti, vogliano essere di una grandezza uguale a quella degli obbiettivi che rappresentano; in questo caso la *v r* andrebbe evidentemente a confondersi colla *a s*, quindi il piano del palco prenderebbe la situazione orizzontale. Se poi un tale divisamento sembrasse troppo arrischiato, perchè forse la prima volta pensato e contrario all'uso comune di costruire i palchi de' teatri, io posso assicurare, e chiunque voglia darsi la pena di riflettere alle ragioni che mi sforzano a proporre una simile riforma, può convincersene, che con questo solo mezzo si possono conciliare gli inconvenienti più notabili della dipintura delle scene, e che a maggior comodo del lettore porrò quivi sotto il di lui esame, acciò ne formi quel giudizio che ne emerge dal caso. E primieramente il piano del palco inclinato volendo che ne rappresenti uno orizzontale, è d'uopo che tutte le linee e gli

accidenti che si suppongono appartenere a quest'ultimo, siano segnate prospetticamente sull'altro; ma sul piano del palco mai non si segnano linee, e nemmeno può assoggettarsi a prospettiva aerea, e siccome una parete senza linee e senza degradazione aerea non potrà mai produrre l'effetto della prospettiva, così il piano del palco si mostrerà sempre nel suo essere, cioè appare ed apparirà sempre inclinato, nè mai potrà dirsi l'immagine di uno orizzontale che vorrebbesi che egli rappresentasse. 2.° L'altezza dell'attore è inalterabile, dunque nel mentre che i suoi piedi poggeranno sul piano assegnatogli dalla inclinazione del palco, la sua testa invece sorpasserà il limite che può accordargli la prospettiva sempre più, quanto maggiore sarà l'inclinazione ora nominata. La prospettiva verrà adunque ad essere sempre più smentita dal confronto del rilievo. 3.° Le fessure nelle quali scorrono le quinte, non possono avere la loro distanza che debolmente regolata dalle leggi prospettiche, perchè non può avere l'architetto tutti i dati delle moltiplici variazioni delle scene, e perchè gli spazj devoluti dalla prospettiva, regolata dalla pendenza del palco, non sono sufficienti, specialmente i più lontani dal punto di vista, al passaggio delle cose spettanti alla rappresentazione, quindi si è preso il partito di farle equidistanti, cioè incombinabili colle leggi prospettiche risultanti dalla pendenza di cui si ragiona. 4.° Supposto il caso che nel segnare tali fessure si prendesse per norma una data situazione

del punto di vista, questo obbligherebbe sempre il pittore a tener calcolo di una tale circostanza, ciò che accrescerebbe la difficoltà e l'imbarazzo dello stesso nella invenzione e nella delineazione delle scene.

188. Posti sott'occhio gli inconvenienti che alla prospettiva derivano dalla inclinazione del palco, ci permetteremo un breve esame, sebben fuori del nostro proposito, sul rapporto che può avere una tale pendenza, col comodo tanto de' personaggi drammatici che degli spettatori, onde indagare se mai da qualche lato possa essere di utilità al complesso della rappresentazione. Riguardo ai cantanti e comici, sembra evidente, che essendo il percorrere un terreno orizzontale più comodo che non il passeggiare su di uno inclinato, così il palco orizzontale per questi non dovrebbe esser discaro. Riguardo ai ballerini, i di cui salti sono sempre in senso verticale, sembra che l'urto di un piano inclinato non debba essere tanto a proposito; egli è ben vero che una tale pendenza potrebbe esser loro di ajuto quando dal fondo del palco s'innoltrano danzando verso il proscenio, ma pagano questo comodo con altrettanto incomodo nel moto contrario; prova ne siano i loro frequenti giri, che se celeri e leggeri sono quando volgono il volto agli spettatori, ben più tardi e pesanti sono quando lo volgono verso il fondo del palco. Se il piano di questo invece fosse orizzontale, sempre uniforme sarebbe lo sforzo ne' moti eguali, ed i ballerini grati sarebbero all'archi-

tetto che seppe conoscere e secondare i loro bisogni. Restano ora gli spettatori, pei quali la pendenza del palco sembra di sussidio onde vedere più comodamente ciò che si rappresenta sullo stesso; ma in questa parte posso dire con più cognizione di causa, essendo ben di sovente anch' io uno di questi, che nella platea se non si ha la fortunata sorte di sopravvanzare in altezza quelli che sono davanti, con buona pace degli architetti, si vede male stando seduti, e malissimo stando in piedi fuori delle file, mentre l'esagerata inclinazione del palco o poco o nulla giova, se evvi un ostacolo che impedisca la retta visuale. Guai a chi sgraziatamente trovasi davanti una testa femminile ornata di piume, od un indiscreto, che poco curando il comodo del suo simile, non voglia levarsi il cappello; può riputarsi a gran sorte il vedere di quando in quando la testa di un cantante, la gamba di un ballerino; cosa che porta ben di sovente la sofferenza agli alterchi, per cui la platea è in disordine. L' inclinazione maggiore della platea sarebbe un mezzo per conciliare ogni ostacolo, ed io sono d'avviso, che se un architetto vincendo l'uso ed i pregiudizj, tentasse una simile emenda ne' teatri, grati gli sarebbero in un punto, spettatori, pittori, comici, cantanti e ballerini.

189. Sintanto però che non si pensa ad una tale riforma, egli è d' uopo adattarsi al costume generale, perciò daremo quivi due avvertimenti, il primo tendente a far conoscere fin dove possa giungere l' inclinazione del palco scenico, senza

urtare di fronte le leggi prospettiche, ed il secondo come debbansi regolare i pittori nella situazione della orizzontale, quando detta inclinazione oltrepassi un tal limite. Pel primo caso, è d'uopo stabilire quale sia la situazione più vantaggiosa per la collocazione del punto di vista nella platea.

190. Oggetto di quistione pei pittori teatrali è un tale articolo, i materiali non vi badano punto, e prendono norma dal loro capriccio, credendo inutile una tale ricerca al buon esito delle scene; i più istrutti però lo vorrebbero collocato nella situazione dell'occhio di un uomo in piedi nel mezzo della porta d'entrata della platea, o nel centro di questa, alla visuale di un uomo seduto. Tra queste due situazioni sonovi, a mio credere, più ragioni che sembrano far propendere la scelta del punto di vista nel centro della platea; fra queste, la principale è relativa alla ricorrenza delle linee segnate sulle quinte, giacchè a pari distanza dal punto visuale, meno soffre alterazione colui che è situato posteriormente che quello davanti al punto suddetto. Sieno a cagion di esempio EH, DI (Fig. XL) le projezioni di due quinte, vedute da un punto di vista projettato in B. Prendansi due punti C, A egualmente distanti da B, e da un punto qualunque D della quinta posteriore, si traccino le DA, DB, DC: evidentemente queste rette segheranno la EH, in E, F, G, presentando l'intervallo FG maggiore di EF, quindi supponendo B il mezzo della platea, A il principio e C il fine, gli spettatori situati avanti al punto

di vista vedrebbero, a pari distanza, le linee delle quinte più spezzate che quelli di dietro. Suppongasi ora la scena dipinta per modo che il punto visuale fosse projettato in *A*, essendo allora gli spettatori collocati tutti davanti al punto di vista, nessuno, se si eccettuino que' pochi che possono fermarsi alla porta della platea, vedrebbe le linee della scena continuate, ed a quelli situati nella prima fila, si presenterebbe loro uno spezzamento che uguaglierebbe tutto l'intervallo *E G*. Si noti quivi che il mezzo della platea è il luogo prescelto dai pittori per l'infilamento delle linee delle quinte, perchè dopo messe in opera tutte le pareti componenti la scena, ivi si collocano, e facendo avanzare più o meno le quinte, segnano il luogo ove le linee di esse si combinano più bene, e quel marcano, generalmente con una caviglia posta in apposito foro nella guida de' carretti, acciò nelle diverse mutazioni di scena abbiano a trovarsi sempre nello stesso luogo; egli è poi facile il comprendere, che il più perfetto punto per la veduta delle scene essendo il punto di vista stesso, suppone sempre l'esatta ricorrenza delle linee delle varie pareti scorgersi da questo solo punto, mentre voler ciò ottenere fuori di una tal posizione, sarebbe cosa troppo arbitraria ed inesatta. Riflettasi inoltre che all'entrata della platea ben di rado gli spettatori possono fermarsi, perchè serve al passaggio, e perchè una fila o due che vi sieno di persone in piedi dietro le sedie, ivi più non si vede, od incomodamente si vede.

191. Scelto adunque per le ragioni che dicemmo, il mezzo della platea all' altezza dell'occhio di un uomo seduto, per il luogo da collocarsi il punto di vista delle scene, sia questo rappresentato da *e* (Fig. XXXVIII), e rappresenti *v s* uno spazio uguale alla lunghezza del palco, e di più *v* il principio di esso. Si segni per *e* una orizzontale *e r*, la quale incontri in *r* il muro che chiude la lunghezza sopraccennata, per *r* e *v* segnata la *v r*, questa indicherà la massima inclinazione che potrà assegnarsi al piano del palco, perchè con questo mezzo viene levata la probabilità che la sezione del telone col piano ora nominato cada sopra la linea orizzontale, e che gli oggetti prospettici espressi sul primo vengano in conseguenza ad essere mutilati, e siccome i teloni mai non si attaccano al muro del fondo del palco, se si eccettuano i ripieghi usati ne' teatri piccoli che non sono oggetti del nostro scopo, così saravvi sempre tra la orizzontale e la sezione anzidetta, che equivale alla fondamentale, uno spazio capace a contenere la continuazione prospettica del piano del palco.

192. Stabilito in questa guisa il limite che può accordare la prospettiva alla pendenza del palco, avvertiremo che questa viene riputata troppo tenue, per cui in nessun teatro, ch' io mi sappia, viene osservata una simil legge. Essendo però cosa inevitabile che la orizzontale del telone stia sopra la fondamentale, per la ragione testè accennata, ne viene di conseguenza che l' altezza del punto di vista non può più avere in questo caso una po-

sizione fissa, ma è d'uopo che vada innalzandosi a misura che il telone si allontana dal proscenio. I pittori da teatro, sentendo la necessità di una tale circostanza, stabilirono una misura fissa alla distanza delle linee summentovate, che equivale ad un braccio di Milano, per cui la prima operazione nel disegnare il telone, è quella di segnare l'orizzontale, che essi chiamano *linea di braccio*, perchè appunto distante un braccio dal piede del telone, e ciò qualunque sia la situazione di questo sul palco. Se poi sembrasse a taluni che il punto di vista risultasse troppo alto, specialmente quando una tal regola si voglia estender anche alle scene di molto sfondo, potrà appigliarsi al temperamento insegnato dal sig. Paolo Landriani nella sua opera intitolata Osservazioni, ecc. part. II, pag. 47, che è il migliore che si possa assegnare in casi simili. Questo sarà il secondo degli avvertimenti che promettemmo più addietro.

193. Abbiam veduto in quest'ultimo § il modo di contenersi nella collocazione della orizzontale del telone, data che sia la pendenza del palco; per quelle spettanti alle quinte ed ai rompimenti, si supporrà un piano passante per la orizzontale del telone e pel punto di vista, e dove questo segherà i piani delle quinte e dei rompimenti anzidetti, ivi sarà il luogo della orizzontale corrispondente.

Della situazione degli obbiettivi rispetto alle quinte ed ai rompimenti.

194. Rettificando nei §§ passati le idee sul modo di regolarsi nella prospettiva teatrale, abbiam veduto che la parte di essa, spettante ai piani delle quinte e dei rompimenti, dovrebbe avere le principali dimensioni quanto si possa poco dissimili da quelle degli obbiettivi rappresentati. Ma a tale cosa opponendosi un palco scenico inclinato, abbiam pure concluso che questo dovrebbe essere orizzontale. Questa disposizione però è anch' essa insufficiente ad ottenere detta eguaglianza nelle dimensioni, se gli obbiettivi non sono ideati dal pittore con certe avvertenze. Infatti supponiamo il piano del palco projettato in $c\,b$ (Fig. XLI), ed una quinta in $l'\,l$, rappresentino inoltre $n\,h$, $o\,i$ le projezioni di due obbiettivi, uno anteriore, l'altro posteriore alla quinta ora accennata; egli è chiaro che in queste due situazioni ne nasceranno i medesimi inconvenienti che abbiam nei §§ 178 e 179 veduto emergere dall' obbiettivo collocato ora avanti, ora dietro alla quinta su cui va espresso, per il che nel caso in quistione viene a concludersi, che più questi obbiettivi si supporranno vicini al piano delle corrispondenti quinte, più la prospettiva riescirà perfetta, ma siccome un obbiettivo non potrà mai confondersi con esso piano, se si eccettua il caso che rappresentasse un piano parallelo a quello della quinta, così dovrà il pittore usare ogni riguardo acciò riesca meno

che si può sensibile una tale circostanza, quindi gli oggetti da rappresentarsi sulle quinte sarà sempre meglio che sieno di poco sfondo, ed il punto di vista (ciò che s'accorda colla situazione che gli abbiamo di già assegnata e gli assegnano generalmente i pittori), collocato molto vicino al piano geometrico, perchè in questo caso il piano prospettico rappresentante la continuazione del palco essendo poco sensibile, riesce facile il confonderlo colle sezioni dei piani delle quinte e del palco, onde evitare l'inconveniente che accennammo nei §§ ora citati, nel caso dell'obbiettivo posteriore od anteriore alla corrispondente quinta.

195. Stabilita la situazione degli obbiettivi da rappresentarsi dalle quinte nel modo che dicemmo, noi vedremo, oltre l'accordo desiderato tra la prospettiva e gli attori, emergere due altri rilevanti vantaggi che risguardano la più perfetta illusione delle scene, cioè, 1.° Essendo lo scopo di un gran numero di quinte e rompimenti, quello d'ingrandire lo spazio praticabile del palco e la scena, egli è evidente, che se le quinte saranno degradate, si avvicineranno tra loro nel discostarsi dal punto di vista, e quindi impiccolirassi il palco medesimo nel luogo ove generalmente richiedesi uno spazio maggiore, e di più andrassi a ristringere la dimensione del telone che è la parte principale della scena, e quel piano a cui debbesi comunemente il maggior effetto di essa; nel nostro sistema invece, tanto la grandezza del palco che quella del telone riesce nella sua massima

dimensione, e perciò oltre al vantaggio del reale aumento dello spazio, anche l'artificiale, che è l'incarico del telone, non verrà mai a scapitare, qualunque sia lo sfondo della scena, cosicchè se questo piano non sarà aperto praticabile, come generalmente si usa, anche ove rappresenta grandi distanze, la scena in tutta la estensione verrà a presentarsi senza incomodi, e senza contraddizioni verso il buon senso ed il modo naturale di vedere. 2.° Se la cosa artificiale, siccome già dicemmo, debb' esser più illusoria quanto più è vicina alla forma dell'oggetto che rappresenta, il sistema quivi esposto egli è certamente da preferirsi a qualunque altro di tal genere, perchè essendo le pareti anteriori al telone, situate appunto nel luogo ove esister dovrebbero i corrispondenti obbiettivi, la distribuzion sola di queste è sufficiente a far concepire la forma generale dell'edifizio, senza altro sussidio, che quello che richiedesi per rappresentar la solidità delle parti di cui è composto.

Della scelta degli obbiettivi rispetto alle pareti anteriori al telone.

196. Le quinte nelle scene teatrali non possono adattarsi con facilità a tutte le invenzioni che il genio suggerisce ad un artista, giacchè dovendo queste, come vedemmo, chiudere i lati della scena, e scorrere in fessure determinate, la loro situazione sul palco non può avere che un certo limite, e viene determinata dal bisogno.

Inoltre la larghezza di esse quinte non può oltrepassare una certa misura, tanto perchè non vengano ad ingombrare di troppo il palco, quanto per il facile maneggio nel loro movimento, quindi la prospettiva che può essere espressa su queste, viene a ridursi ad una parte limitata della prospettiva generale. Questi obblighi formano adunque un legame dal quale il pittore non può sciogliersi, perciò è forza che la sua composizione sia sempre combinata in modo da adattarvisi, senza far scorgere la necessità della circostanza, ma studio particolare farà che le cose combinino in maniera, che tale necessità sembri nascere dalla composizione stessa della prospettiva.

197. Un'altra circostanza debbe riflettersi nella scelta degli obbiettivi da esprimersi sulle quinte, ed è quella, che collocandosi lo spettatore fuori del punto di vista, viene in certe situazioni a scoprirsi parte della prospettiva delle pareti posteriori, ed in certe altre viene a scoprirsi parte del piano che andrebbe nascosto dalle pareti anteriori, cosicchè, se sul primo fosse delineata la sezione di esso colla piramide visuale, verrebbe a ripetersi ciò che sulla parete anteriore viene di già espresso. Onde palliare per quanto è possibile una tale inevitabile circostanza, è d'uopo che gli obbiettivi spettanti a queste pareti sieno di una natura tale, che le distanze verticali possano fra loro variare senza visibile deformità, e che le prospettive parziali di esse si possano prolungare anche sulla parte che andrebbe a nascondersi, senza essere

obbligati a ripetere ciò che viene espresso su la parete anteriore, in qualunque situazione possa essere colui che osserva la scena.

198. Qualunque però sia il peso di tali difficoltà, egli è per altro certo che non sono della forza con cui si presentano di primo aspetto alla mente, poichè nel nostro sistema situandosi le pareti anteriori al telone nel luogo de' corrispondenti obbiettivi, i movimenti delle prime debbono di conseguenza secondare la natura della fabbrica stessa, e quindi non essere tra esse discordanti, se si eccettua il loro confronto colla prospettiva espressa sul telone che non può assoggettarsi al movimento del rilievo, e la ricorrenza delle linee, la quale non può esser perfetta che nella situazione del punto visuale; ma anche queste cose si possono passabilmente palliare mediante una giudiziosa scelta nella forma degli obbiettivi, poichè l' occhio che è giudice competente in certi casi, non è più tale in altri, e facilmente si lascia guidare dall' immaginazione, ove non abbia un dato certo per giudicare dell' alterazione di un dato oggetto. Una linea spezzata, a cagion di esempio, gli si presenterà sempre spezzata per piccola che sia la differenza onde comparir retta, ed una linea regolarmente curva farà sempre cattivo effetto all' occhio, per poco che si discosti dal suo regolare andamento; s' interrompino invece queste linee con degli oggetti sporgenti, l' occhio allora potrà essere facilmente ingannato dalla continuazione di esse linee, e più facilmente potrassi il-

ludere, quando trattasi di giudicare di spazj tra oggetti posti verticalmente, qualora niuna linea esista atta a fargli conoscere ove cader dovrebbe la loro vera situazione, per cui in questo caso supplendo l'immaginazione, questa agisce secondo l'abitudine di vedere, e secondo le proporzioni che generalmente vengono assegnate ad oggetti analoghi, e la prospettiva può fino ad un certo segno riescire continuamente gradevole. Sta adunque nel giudizio del pittore, a scegliere quegli oggetti da dipingersi sulle quinte, che per la loro proporzione e l'interrompimento delle linee, possano risultare favorevoli allo scopo dell'arte sua, e siano capaci di nascondere que' difetti, che l'arte di per sè non può evitare.

199. Ciò che si è detto delle quinte s'intenderà convenire anche ai rompimenti, cosa che per altro si ottiene più facilmente in questi, perchè non essendo obbligati nè nella grandezza nè nella situazione, può il pittore collocarli in quel luogo, e dar loro quella forma che più conviene al caso.

Del segamento delle quinte e dei rompimenti.

200. Intendo per segamento quella linea o lembo che contermina il piano delle quinte e dei rompimenti, e racchiude la prospettiva eseguita su di essi. La sua situazione sul palco si ottiene, nelle quinte avanzando più o meno i carretti destinati a quest'uopo verso il mezzo del palco, e

nei rompimenti situando il meccanismo che gli sostiene in quel luogo che la composizione della scena richiede.

201. Tutte le cose dette nei §§ passati sarebbero insufficienti a rendere perfetta una scena teatrale, se le quinte e i rompimenti non avessero il loro segamento collocato in quel luogo ch'è indicato dalla natura stessa dell' obbiettivo, e ciò per la necessità di dividere la prospettiva di queste pareti, in maniera che non cada nella unione scambievole una colonna o qualche oggetto di forma continuata spezzato. Dovendo adunque il pittore cercare il modo che queste diverse prospettive cadano su di una divisione richiesta naturalmente dalla forma della fabbrica, e di più che gli intervalli indicati dalla loro unione sieno in quel giusto rapporto che esige la prospettiva generale, vedesi la necessità di regolarne la situazione con dei dati certi, e non con una direzione arbitraria od accidentale. Si proponga pertanto il pittore di fare una scena che dal telone s'innoltri sulle quinte sino all'apertura del proscenio, e sia quest'innoltramento sulla linea $B'A'$ (Fig. XLIII), riguardata come la traccia su cui s'innalza un intercolonio. In tale caso essendo le colonne per loro natura staccate le une dalle altre, avremo il comodo di far cadere il segamento delle quinte, sulla prospettiva del contorno apparente che riguarda il mezzo del palco di ciascuna di esse. Rappresenti adunque E il punto di stazione, e le linee che partono tangenti alle colonne indicate

in V, X, Y e concorrono in E, le linee visuali corrispondenti al relativo contorno apparente di ognuna, s'innoltrino le quinte sino a toccare ciascuna, delle linee testè nominate, quella appartenente alla colonna che debbe esprimere, e sieno tali quinte projettate in VV', XX', YY'; ritenendo queste come altrettante linee del taglio spettanti ciascuna alla corrispondente quinta, e segnando con questi dati la prospettiva di quella porzione dell'obbiettivo generale che gli viene assegnata, evidentemente, situato che sia lo spettatore nel giusto punto di vista, vedrà camminare l'intercolonnio, con quella degradazione che lo spazio reale ed apparente insiem combinati, richiedono per esprimere con verità una prospettiva unita.

202. Intendasi ora di compiere la scena dal lato sinistro con un intercolonnio parallelo al primo, come accade in un portico rettangolare. Sogliono generalmente i pittori da teatro, anche nei casi analoghi a quello della presente Fig. cioè veduti fuori dell'angolo retto (k), dare una disposizione simmetrica ai segamenti delle quinte in tutti e due i lati della scena, nel qual caso le quinte di cui si ragiona prenderebbero la direzione della TO; ma siccome se una simile disposizione in tali quinte non viene regolata dai raggi visuali, come nelle antecedenti abbiamo osservato, queste non possono avere alcuna relazione col lato che debbono esprimere, ed irregolare risulterebbe la pianta di un simile fabbricato, così non potrassi mai rendere perfetta una tal scena, se non col

seguitare anche per queste le precauzioni accennate per le quinte dell'altro lato; ed allora oltre all'ingrandimento maggiore che si otterrebbe nel palco, avrebbesi una distribuzione regolare in tutto l'apparato della scena, come dalla figura stessa può facilmente scorgersi.

203. E non si sgomentino i prospettici nel considerare che tutte queste quinte, meno la prima, resterebbero nascoste a quegli spettatori che si trovassero collocati dalla stessa parte, mentre questo è voluto dalla natura stessa della fabbrica, e non si vedrebbero nemmeno se gli oggetti, invece di essere dipinti, fossero di rilievo. In tale caso la posizione delle quinte non fa che secondare la natura dell' obbiettivo, e sarebbe cosa irragionevole, il pretendere che la prospettiva abbia a mostrarci ciò che si nasconde naturalmente agli occhi del riguardante. E non si valuterà assennata l'obbiezione di taluni che dicessero esser troppo sottile una tale ricerca, ed inutile, perchè fuori del giusto punto di vista, anche questo metodo è incapace a presentare una esatta corrispondenza negli spazj tra quinta e quinta con quelli rappresentati dal telone, mentre un tale effetto, solo ottenibile dal rilievo, non comprova l'inutilità del metodo che io propongo, perchè se in questo si ha un punto nel quale la scena dipinta non presenta nulla di discordante, sempre meno difettosi saranno gli altri punti, di quello che deriva da un metodo, il quale non potendo in nessun luogo conformarsi colle leggi della visione, è insuffi-

ciente a mostrare allo spettatore, tanto l'intenzione dell'artista relativamente alla costruzione della fabbrica, quanto la regolarità della pianta di essa: ma la ragione è talvolta così negletta dai pittori in casi simili, che veggonsi spessissimo delle scene, nelle quali il lato *O T* non rappresenta punto un terzo lato, come accade naturalmente a chi osserva l' interno d' un edifizio rettangolare, ma bensì un prolungamento del lato *C M*; per cui, nel mentre scorgonsi correre sulle quinte le linee esistenti sul piano di questo lato, esse non vedonsi proseguire il piano medesimo, ma avanzarsi più o meno a seconda della loro varia situazione sul palco, da cui ne nasce un indovinello impossibile a sciogliersi nemmeno da chi lo propone, e che tale si conserverà sempre in quelle scene a più piani, trattate col metodo delle prospettive su di una sola superficie, e che mostreranno due lati, laddove la natura del luogo ne esige tre.

Delle aperture praticate nelle quinte.

204. Giacchè nel far noti i difetti che accadono alle rappresentazioni teatrali, cercasi di migliorare il palco scenico, e renderlo tale che faccia la maggior illusione possibile, non è da tacersi un inconveniente che nasce dalla situazione delle quinte in senso parallelo al telone, come le abbiamo fino ad ora considerate, e come lo sono generalmente in tutti i teatri, laddove le scene abbisognano di porte e finestre praticabili; perchè

una tale disposizione rende inservibili le aperture dipinte sulle quinte per le seguenti ragioni: 1.° Lo scorcio prospettico va generalmente ad impiccolirsi a segno, che rendesi insufficiente a lasciarvi passare un uomo. 2.° Dovendo le quinte prendere col sussidio della prospettiva una apparente inclinazione perpendicolare, o quasi perpendicolare alla loro reale direzione, e gli attori non potendo sortire dalle porte su di esse segnate che venendo avanti e poi voltandosi, e non su di una retta come fassi naturalmente quando si entra in una casa, così ne nasce una contraddizione colla direzione che esprimono, ed imbarazzo negli attori, che più trovano comoda la sortita tra quinta e quinta, e non badano punto se questa sia piuttosto dal muro che dalla porta.

205. Onde evitare un simile inconveniente, si provarono alcuni a dipingere le aperture suddette con uno stipite sulla quinta davanti ed il resto sulla posteriore, ma da un simile ripiego poco profitto ne trassero, perchè per la distanza tra quinta e quinta, a seconda della situazione dello spettatore, la porta o ristringevasi a segno di non vedersi che lo stipite anteriore, od allargavasi mostruosamente, e giammai il ciglio ne era in linea; motivo per cui i comici trovarono l'espediente di attaccare alle quinte delle porte portatili e posticce, ed inclinate col piano delle stesse, cosa che sturba non poco la illusione, perchè le linee su di esse espresse giammai concorrono al punto devoluto dalla corrispondente prospettiva, e sempre

fanno un angolo col piano delle quinte che dovrebbero essere in linea, ed in fine lasciano un mostruoso vuoto per di sopra, che tutto fa scomparire l'artifizio della pittura.

206. E qui cade in acconcio l'esporre un modo di collocare le quinte, atto ad evitare molti difetti. L'artifizio di ciò in null'altro consiste, che nella situazione del piano di esse, che in questo caso io crederei bene situarlo su di un angolo semiretto con quello del telone (*l*). Da una tale disposizione nascono i seguenti vantaggi: 1.° Lo scorcio prospettico riesce sempre minore, e quindi più atto a lasciarvi passare un uomo. 2.° Praticando un'apertura su di una quinta inclinata come dicemmo, l'attore per sortire può percorrere una retta parallela al telone, quindi essa sortita sembrerà, come dovrebbe essere, perpendicolare alla porta. 3.° Riesce sempre più facile il nascondere quel vuoto tra quinta e quinta che tanto disturba l'effetto della scena, perchè lascia sempre travedere persone che nulla hanno a che fare coll'intreccio, e che fanno tutt'altro che servire alla rappresentazione. 4.° Supposto lo spettatore in qualunque punto della platea, i piani delle quinte risultando con tale disposizione più vicini gli uni agli altri, vedrà sempre minore lo spezzamento nella ricorrenza delle linee su di esse quinte espresse. Nelle dimostrazioni pratiche daremo il modo di operare, per ottenere su di un tale sistema di piani non paralleli al telone, una prospettiva uniforme, e nell'appendice a questa sezione,

darò un mio pensiero sul modo di ottenere l'inclinazione predetta, senza cambiare l'attuale disposizione delle fessure del palco.

Delle scene praticabili.

207. Finora il nostro ragionamento non percorse che il piano del palco in senso orizzontale; facciasi ora una breve riflessione anche su quelle scene che esprimono dei piani elevati su di esso, e che sono diminuite prospetticamente in varj pezzi separati, per essere praticate dagli attori sino a distanze supposte grandissime, distinte perciò, quasi per eccellenza, col nome di *scene praticabili.*

Essendo generalmente tali scene composte di oggetti irregolari e di arbitrarie distanze, la sola scorta della pratica e del genio del pittore, è più che sufficiente a comporle in modo da produrre l' effetto che si desidera; ma parlando del paragone tra gli oggetti reali ed apparenti, l' incongruenza è dove si mostra nel grado più eminente; ivi si veggono ben di sovente gli attori sorpassare colla testa alberi, case, non che le torri più elevate, varcare con un passo fiumi maestosi, passar ponti le di cui sbarre non arrivano a coprir loro l' intiera gamba, e simili sconvenienze; ciò che leva la grata sorpresa e l' effetto ragionevole che potrebbero produrre di per sè: egli è perciò da desiderarsi che la lodevole pratica qualche volta usata, di far agire nei diversi piani per-

sone di varie grandezze proporzionate al luogo, come di giovinetti, ragazzi e simili, non fosse di leggieri posta in dimenticanza dai compositori di tali spettacoli, anzi a mio credere non sarebbe cosa fuori di proposito, volendo estendere l'illusione ad una distanza tale che la degradazione prospettica esigesse una grandezza minore dei personaggi su nominati, il sostituirvi dei pupi o burattini, che dietro i praticabili si potrebbero far muovere con facilità e naturalezza. Egli è inoltre cosa commendevole la prospettiva aerea ottenuta con dei veli bianchi, e che potrebbero essere azzurricci nelle grandi distanze, anteposti ai varj piani percorsi dalle varie grandezze; l' approvazione generale e gli applausi che generalmente si prodigano in casi simili, comprovano l' effetto e l'impressione gradevole che producono negli astanti, e che le cose ragionevoli sono generalmente apprezzate; ciò fa sperare, che persuasi una qualche volta di questa verità anche quelli che presiedono a tali spettacoli, porranno una onorevole catena al loro troppo libero genio, presentandoli con sano giudizio, conformi alle leggi della prospettiva e del buon senso.

Regole generali per ben disegnare una scena.

208. Considerato bene tutto ciò che si è fino ad ora detto, ecco le precauzioni che ne emergono, atte a regolare un pittore teatrale nelle diverse combinazioni di scene.

I. Essendo cosa inevitabile che le scene abbiano i loro lati chiusi dalle quinte, egli è perciò necessario, che, qualunque sia la scena, questa abbia sempre due lati innoltrantisi verso il proscenio. Egli è inoltre necessario l'avvertire, che i lati obbiettivi i quali aver debbono la loro prospettiva espressa dalle quinte, non dovranno molto discostarsi dal parallelismo col raggio principale; e ciò perchè l'infilamento delle quinte non prenda una direzione troppo obbliqua, e quindi incomoda alla rappresentazione e spiacevole a vedersi.

II. Il segamento delle quinte e dei rompimenti, va regolato dai raggi visuali spettanti al contorno apparente del corrispondente obbiettivo (§ 201), e la distanza tra quinta e quinta, dalla posizione e qualità dell'obbiettivo che debbe rappresentare.

III. È cosa nota, che la prospettiva può aumentare l'illusione per rispetto alla profondità, non alla larghezza di una scena; nel caso adunque che si volesse far esprimere da una scena teatrale uno spazio più ampio dell' apertura del proscenio, la composizione dell' obbiettivo dovrà essere combinata in modo, che i primi oggetti non oltrepassino in dimensione l'apertura nominata, e che lo spazio maggiore incominci dopo un dato numero di quinte: suppongasi per esempio che la scena rappresentar debba una piazza, un tempio, un vasto cortile, o cosa simile; in tale caso comincerà il pittore a far contenere dalle prime quinte un tronco di strada, un vestibolo, od un atrio, indi

si allargherà col telone ed altre quinte più in ritiro delle prime. Questa precauzione che porta una reale variazione nelle dimensioni delle scene, mostra che i diversi rapporti di grandezze nelle varie decorazioni di cui abbisognano, come di sale, gabinetti, con piazze, cortili, ecc. non sono impossibili ad ottenersi, e mostra che la grandiosità di una scena non dipende da una vasta apertura di proscenio, ma da un palco largo e profondo abbastanza.

IV. Il pittore non arriverà mai ad ottenere una esatta corrispondenza fra le prospettive delle quinte e de' rompimenti con quella del telone, se non diretto da quattro linee di pianta (*m*); e se desso assuefatto a non aver vincoli, ritenesse per avventura inutili simili precauzioni, sappia che questi non sono ostacoli da me inventati, ma esistenti ogni qualvolta egli si accinge ad operare, qualunque sia la regola che serve di norma alla delineazione grafica della sua opera. Ogni metodo atto a disegnare una prospettiva, purchè esso non sia arbitrario od inesatto, condurrà costantemente ad un eguale risultamento, onde lo scopo di questa sezione non è quello di cambiare la forma delle prospettive teatrali, ma bensì quello di porre sott'occhio i difetti che dalle regole arbitrarie derivano, ed il modo di combinare i piani di cui componesi la scena, per adattarli all'uso de' teatri, ed isfuggire il più che sia possibile que' difetti, i quali sempre più s'aumentano, a misura che vanno moltiplicandosi gli usi delle prospettive. Quan-

do si conosce ove esiste un ostacolo, rendesi sempre più facile l' evitarlo, ma se ignorasi o non si cura, è facilissimo l'inciamparvi e riceverne danno, e che s'incolpi l'arte di que' difetti che la poca perizia dell' artista non seppe prevedere ed iscansare. La irriflessione non fu mai buona guida, non solo al perfezionamento delle arti, ma ben anche alla esatta esecuzione di que' metodi che le teorie han saputo somministrarci.

209. Sogliono dire i pratici, che le speculazioni teoriche ben di sovente alla prova non corrispondono allo scopo cui mirano, anzi ho udito asserire da alcun pittore, che fu mestieri in certi casi, per l' effetto della sua opera, di deviare fino dall'unità del punto di vista in una sola scena. Senza negare del tutto una simile obbiezione, io convengo che allorquando le regole esatte non si possono adattare a puntino alla pratica, debbono le teorie concedere a questa un temperamento; ma se le regole sono basate su falsi principj, come scorgerassi che il temperamento da essi creduto necessario per l' effetto della sua scena, sia piuttosto quello che avvicini le regole alle esatte teorie anzi che allontanarle? A buon conto io gli faccio presente, che essendo, come di già vedemmo, capriccioso il loro modo di prolungare la prospettiva del telone sulle quinte, ne viene di conseguenza che ogni piano può avere il suo particolare punto di vista, e siccome alla maggior parte de' pittori ciò accade senza avvedersene, così è facilissimo che quando credono discostarsi dalle supposte regole esatte,

essi si avvicinano invece alle vere. Inoltre il metodo di ottenere l' infilamento delle linee nelle quinte, cercandolo a tentone nel mezzo della platea, quantunque in questo luogo non sia collocato dal pittore nella delineazione della sua prospettiva il punto di vista, non mostra incertezza nell' operare e moltiplicità nel medesimo punto? Vero è che non potrassi mai sapere ove i metodi dati dalle teorie prospettiche vanno alterati, se non operando con essi, e se questi hanno qualche volta bisogno di un temperamento, egli è altresì certo che questo non può avere che un certo limite, e che le regole arbitrarie non avendo principj stabili, sono sempre in necessità di essere variate, per cui moltiplicandosi gli arbitrj, levasi in certo qual modo il merito dell' esattezza a quell' arte, che usata con sani principj, non farebbe mestieri di alterarla ad ogni istante, onde secondare i bisogni per cui fu fatta.

210. Porremo fine a quelle considerazioni che credemmo necessarie onde conoscere il carattere della prospettiva teatrale, e ci accingeremo a mostrare il modo di operare graficamente; ma prima è d'uopo premettere quelle poche teorie, risguardanti la relazione, che le prospettive delle rette espresse sulle varie pareti hanno tra loro, per cavarne quelle abbreviazioni che da una tale circostanza dipendono, e condurre la pratica per la più spedita via possibile.

Teorie prospettiche delle linee rette espresse su pareti separate.

211. *Le prospettive di una retta, comprese fra l'incontro ed il concorso di essa, ed espresse su pareti parallele, risultano sempre parallele e dell' egual dimensione.*

Sia $A\,B$ (Fig. XXXVII) una retta obbiettiva, g' l'incontro di essa su la parete posteriore, e g quello spettante alla parete anteriore. Sieno $f'E$, fE i raggi di concorso pertinenti alle due pareti, ed f', f i relativi concorsi. Immaginiamo un piano passante per $B\,g$, ed $f'E$; evidentemente le sezioni $f'g'$, fg di questo colle pareti (che saranno pure le direzioni prospettiche dell' obbiettiva proposta sulle pareti nominate), risulteranno parallele, perchè esistenti nell' incontro comune di un piano con due piani paralleli, ma essendo parallele anche le ff', gg', sarà $fgf'g'$ un parallelogrammo, di cui le sezioni testè nominate rappresenteranno i lati opposti, perciò saranno esse pure dell' egual dimensione.

212. *Se sopra una serie di pareti parallele vengono espresse le linee di concorso di un sistema di rette, parallele ad un dato piano, tali linee di concorso risultano parallele.*

Poichè queste ultime linee essendo l'intersecazione di un piano colle pareti parallele (§ 47), non possono risultare che parallele anch' esse.

213. *Se sopra una serie di pareti comunque poste, purchè verticali, si segnino la orizzon-*

tale e la fondamentale, queste conserveranno un'egual distanza tra loro.

Perciocchè essendo tali linee le intersecazioni di due piani orizzontali, e quindi paralleli fra loro, colle pareti che sono verticali, evidentemente la distanza interposta fra ciascuna orizzontale e fondamentale rispettiva, sarà quella esistente fra i due piani, perciò ecc.

214. *I punti d'incontro di una retta parallela al piano geometrico, sono sempre egualmente distanti dalle orizzontali e fondamentali rispettive, quando queste appartengono a pareti verticali.*

Imperocchè se faremo passare un piano per la retta obbiettiva parallelamente al piano geometrico, evidentemente le sezioni del suddetto piano colle varie pareti saranno rette parallele alle fondamentali ed orizzontali corrispondenti, e da queste equidistanti; ma in tali sezioni esister debbono i relativi punti d'incontro, dunque ecc.

215. Dal riassunto di queste teorie si ricava:

I. Che qualora si soprappongano tra loro i punti di concorso di varie rette parallele, e le linee di concorso spettanti ad un piano regolatore parallelo alle medesime, i punti d'incontro e le prospettive corrispondenti di esse rette, su tutte le pareti parallele, saranno rispettivamente soprapposte.

II. Che soprapponendosi le orizzontali di varie pareti non parallele, ma verticali, e le linee d'incontro spettanti ad un piano obbiettivo pure verticale, sul quale esistano varie rette orizzontali, i punti d'incontro di ciascuna di queste, saranno rispettivamente soprapposti.

CAPO II.

PRATICA PER LA PROSPETTIVA TEATRALE.

216. La pratica per disegnare prospetticamente gli oggetti sulle varie pareti di cui può comporsi una scena teatrale, si riduce a quella risguardante una sola superficie, come di già dicemmo, giacchè quel genere di prospettiva che chiamasi generalmente teatrale, altro non è che un accozzamento di regole pratiche, qualche volta arbitrarie, o del genere di quelle regole abbreviatrici che saranno il soggetto della Sez. III. Dove adunque la prospettiva teatrale può diversificare dall' altra, si è nella giudiziosa distribuzione delle pareti che la compongono, e nello scegliere le regole capaci di abbreviare la pratica spettante alle pareti di per sè.

217. Per la combinazione di queste pareti, la pratica usata dai pittori da teatro, viene dedotta da una misura cavata dalla forma e grandezza del palco, la quale nella delineazione della scena, serve ad essi di regola per soprapporre in quel dato sito le pareti anteriori al telone, al telone medesimo, sulle quali prolungano poscia le linee prospettiche già segnate su questo; ma siccome una tale soprapposizione regolata nel modo che dicemmo, nulla ha di comune colle leggi richieste dalla prospettiva, così in questa parte evvi molto dell' arbitrario e dell' inesatto.

218. È pratica inoltre usata dai pittori teatrali, per quelle linee che hanno un concorso lontano ed incomodo, di segnare sulle loro tele delle linee primordiali concorrenti al punto ora accennato, le quali servono ad essi di norma, per la direzione prospettica di quelle linee intermedie che all' opera abbisognano. Essendo mio scopo il distaccarmi meno che sia possibile, dagli usi che l' esperienza di molti valent'uomini credettero più idonei alla facilitazione delle regole della prospettiva teatrale, procurerò di sottoporre ad un metodo esatto la misura regolatrice della soprapposizione sopraccennata, e sembrandomi il ritrovamento delle linee primordiali testè nominate, più che sufficiente a far conoscere il modo di operare per quelli che hanno una perfetta cognizione delle regole esposte nella Sez. I, ristringeremo le nostre ricerche ai dati necessarj per ottenere le stesse.

219. Riguardo alla inclinazione del palco, avendo noi stabilito che il di lui piano debba essere orizzontale, non verrà da noi calcolata l' accidentale pendenza che questo possa avere nei diversi teatri; insegneremo però il modo di ritrovare quell' accrescimento che nei piani delle quinte ne deriva più o meno, a seconda che questi sono più o meno vicini al proscenio, accrescimento che dovrà il pittore far perdere nella prospettiva di essi piani coll' usata pratica, acciò la situazione inclinata, non sia d' inciampo all' ottenimento di que' vantaggi che quella orizzontale ci presenta, non che al più spedito metodo delle ope-

razioni grafiche. In questa guisa spero, che uniformandomi il più che sia possibile a quelle leggi che la verità della illusione richiede, ed alla pratica più comune dei pittori, un doppio vantaggio ne verrà ad emergere, cioè una maggior illusione nella scena, una maggiore speditezza nelle regole, e fors' anche una maggior probabilità che queste possano essere adottate.

Sul modo di combinare la situazione delle pareti verticali componenti una scena teatrale, coll' icnografia dell' obbiettivo.

220. *Di un cortile rettangolare a colonne* (Fig. XLIII).

Primieramente dovrà il pittore da teatro avere la pianta del palco su cui deve collocare la scena, acciò possa regolarsi mediante le precauzioni accennate nel § 208, coll' apertura del proscenio, colla distanza tra quinta e quinta determinata dalle fessure del palco, come è noto, e colla capacità interna di esso. Sia pertanto quest' apertura eguale a TA', e le rette VV', XX', YY', indichino alcune fessure per le quali passar debbono le quinte. Immaginiamo che tre quinte per lato sieno sufficienti ad ottenere lo spazio praticabile del palco. Pei punti V, X, Y si faccian passare tre rette parallele all' apertura del proscenio, che supporremo come projezioni di un piano passante per le quinte. Una quarta retta nella situazione di FG supporremo essere la projezione del piano del telone.

Preparata in simil guisa l'operazione, s'incomincerà dal segnare le due rette $T\,C$, $A'\,B'$, parallele ai lati del cortile, le quali immagineremo passare pei centri delle icnografie delle colonne, ed inclinate alla $F\,G$ ad arbitrio del pittore, avendo avuto per altro, riguardo all' avvertenza data nel § 208 I. Le distanze $V\,X$, $X\,Y$ determineranno quella tra i centri ora accennati, e le icnografie potranno segnarsi tangenti alle rette $V''\,V'$, $X''\,X'$ ecc., e posteriori alle stesse, e si replicheranno oltre la retta $F\,G$, fin dove si vuole estendere il cortile, compiendo anche il lato $C\,A$, con quelle precauzioni che sono inerenti al caso. Abbiam già veduto nei §§ 201 e 202 il modo di situare il segamento delle quinte, perciò segnando dai punti V, X, Y, e corrispondenti dall' altro lato, le rette $Y\,Y'$ $X\,X'$ ecc. eguali alla larghezza delle quinte, queste saranno le linee del taglio spettanti alle quinte stesse, per cui lo spazio reale del palco verrà compreso dal parallelogrammo $V\,B\,R\,T$, e l'apparente si estenderà sino a $C\,A$, essendo l'accrescimento $B\,A\,C\,R$ rappresentato dal telone.

221. *Di una piazza esagona, con tre strade praticabili* (Fig. XLIV).

Tenendo per base le precauzioni che testè accennammo, circa le relazioni delle dimensioni dell' icnografia della piazza con quelle del palco scenico su cui debbe esprimersi, s'incomincerà dal primo tronco di strada, il quale si farà contenere dalle quinte più vicine al proscenio

(§ 208 III). Due altre quinte situate in *H H′*, *A A′* (oppure anche due unite in una sola fessura e sostenute dagli appositi carretti, nel caso che abbisognassero), conterranno la prospettiva corrispondente ad *X B*. La quinta situata nel luogo di *B*, esprimerà lo sporto dell'atrio e la prima colonna dello stesso. Tutto l'intercolonnio *B C* potrà esser composto da piccole quinte, contenenti ciascuna una colonna, le quali dando l'apparenza del rilievo all'intercolonnio suddetto, che potrà anche essere praticato da uomini, aumenterà l'illusione della scena, col secondare, almeno per le distanze, tutti i punti in cui si può collocare l'osservatore; finalmente le quinte mostrate in *G G′*, *F F′*, esprimendo la prospettiva di *G′ Z*, compirà quella di un lato della scena. Lo stesso s' intenda pel lato opposto.

Il telone si potrà collocare nella situazione di *O P*, per contenere il resto della prospettiva, e se la larghezza di esso fosse incombinabile col relativo meccanismo, si potrà dividere in tre parti, avendo l'avvertenza per altro di far cadere la unione di esse parti, nella prospettiva delle sezioni dei lati della piazza projettate in *H*, *I*.

222. *Di una scena rappresentante un vasto tempio* (Fig. XLV).

Segnata coi noti dati la icnografia di esso tempio, s' incomincerà dal vestibolo anteriore, il quale sarà formato dalle quinte espresse in *P M*, *O N*, dalle corrispondenti nell' altro lato, e dal rompimento indicato in *Q L*, ritenendo ciò

che si è già detto, circa la vicinanza di queste pareti coi corrispondenti obbiettivi, e la collocazione del segamento di esse, e forando l'intercolonnio espresso dal rompimento, come è noto; nel qual caso sarà più lodevole la pratica, se si aggiungerà un altro rompimento in *I' L'*, per le colonne posteriori. Abbisognando ad una tale scena molto spazio di palco praticabile, e libero il mezzo di essa per collocarvi un'ara *R* di rilievo, si potrà situare il telone in *A B*, e siccome la larghezza di questo telone non arriverebbe a chiudere il traguardo de' rompimenti, così, acciò non sia scoperto l'interno del palco, si aggiungeranno altre quinte in *C D*, *E F*, *T S*, per contenere le corrispondenti colonne.

Se poi non abbisognasse ad una tal scena tanto spazio praticabile di palco, si potrebbe porre il telone nella situazione di *G H*, ed allora essendo chiuso bastantemente il traguardo dell'interno del palco, si potranno evitare le quinte posteriori ad essa *G H*, e di più rendere eguale la pianta in tutti e quattro i lati, come vedesi praticato nel lato destro *B H*, giacchè la chiusura *C G* del lato sinistro, come è facile l'accorgersi, è necessaria per non essere obbligati a dipingere sulle quinte oggetti troppo lontani dal loro piano, o moltiplicare di troppo le stesse.

Dopo le riflessioni fatte nel Capo I di questa sezione, sarebbe inutile l'avvertire il pittore di guardarsi bene d'aprire praticabile la porta situata in *V*, ma giacchè simili inconvenienti sono

famigliari alle rappresentazioni teatrali, non sarà inutile il porre sott'occhio al lettore i portenti che ad esso, senza avvedersene, si presentano in casi simili. L'attore si presenta gigante in *V*, e con un magico passo, atto ad uguagliare nient'altro che la dimensione *VX*, si ritrova pigmeo in *X*. Obbietteranno forse taluni, che per servire ad una data rappresentazione drammatica, è necessario alle volte l'aprire delle porte anche nel mezzo del telone. Veramente io stento a persuadermi come una tale circostanza debba assolutamente porsi nel novero delle necessità; ad ogni modo però non mi si potrà negare, che, o nel dramma o nella scena, evvi in questo caso qualche cosa d'irragionevole.

223. Qui porremo termine agli esempj, coi quali crediamo aver dimostrato la maniera di combinare le pareti delle scene acciò risultino di migliore effetto dell'usata, e vincolate strettamente alle regole della prospettiva. Se mai un tale sistema venisse ad essere adottato, sarà facile all'operatore il trovare altre numerose combinazioni, giacchè illimitato è il dominio dell'invenzione; notando per altro, che non tutte queste potranno fornire una disposione nelle pareti, atta a produrre un buon effetto, e che la pratica sola può servire di guida, per istabilire la composizione degli obbiettivi da rappresentarsi.

Modo di tracciare sulle pareti verticali, le prospettive di linee parallele al piano geometrico.

224. *Delle rette espresse su pareti parallele.*

Si riporteremo alla Fig. XLIII, nella quale immagineremo tre piani verticali, aventi le loro icnografie nelle rette CT, CA, AV. Segnate le projezioni delle pareti nel modo che vedemmo nel § 220, si tracci la retta di concorso spettante alle linee orizzontali dei lati che debbono innoltrarsi sulle quinte; evidentemente nelle sezioni di questa colle FG, $Y''Y'$, $X''X'$, $V''V'$ avransi le projezioni dei punti di concorso pertinenti alle linee in quistione ed a ciascuna delle pareti componenti la scena; quindi sarà O''' la projezione del concorso che appartiene alle quinte anteriori, O'' quella delle quinte medie, O' quella delle posteriori, ed O quella del telone.

Rappresenti X il piano del telone nominato, la indefinita pr la orizzontale, q il punto principale, $z'z$ la fondamentale o il piede del telone, ed b il concorso corrispondente ad O. Prendansi sulla pr le parti oy, ox, ov, eguali, la prima ad $O'Y$, la seconda ad $O''X$ e la terza ad $O'''V$, e si sopraponga a v il segamento corrispondente a V della quinta projettata in $V'V$, ad x quello spettante ad X della $X'X$, e ad y quello pertinente ad YY', ed in modo che le orizzontali delle varie quinte formino una sol retta colla pr; evidentemente pel § 215 I, le linee prospettiche risguardanti ciascuna di quelle obbiettive orizzontali

che vanno espresse sui varj piani delle quinte e del telone, saranno soprapposte le une alle altre e concorreranno tutte in o, perciò se sarà sul telone segnata la prospettiva di parte del lato obbiettivo che debbe esprimersi sulle quinte, le linee rappresentanti le orizzontali sopradette si potranno prolungare sul piano di ciascuna di esse. Ciò che si è detto servirà di norma anche per la soprapposizione delle quinte spettanti al lato sinistro.

225. Con una operazione analoga a quella ora detta, si potrebbe pure trovare la soprapposizione necessaria per ridurre ad un concorso comune anche le rette pertinenti al lato projettato in CA, ma cadendo un tale concorso generalmente fuori del locale in cui si eseguisce la scena, riesce impossibile l'eseguire l'operazione relativa; inoltre egli è evidente, che nessuna delle linee spettanti al lato testè nominato, potrebbe esprimersi sulle quinte, laonde l'operazione si ristringerebbe a trovare la direzione delle linee parallele ad esse, e non il loro prolungamento; il modo adunque di operare in questo caso atto a facilitare la pratica, sarà quello di tracciare le linee primordiali di cui facemmo menzione nel § 218. A questo scopo prendansi sulla retta CA due punti qualunque I, M, e da questi si eccitino due rette IL, MN parallele alla FG, di lunghezza arbitraria, ma eguali; dagli estremi di queste rette si segnino le IE, LE; ME, NE, e presi sulla pr gli intervalli io, om eguali ai rispettivi $I'O$, OM', s'innalzino sui punti i, m

le normali $i\,l'$, $m\,n''$, sulle quali, cominciando da i e da m, si replicheranno quante volte occorrono gl' intervalli corrispondenti $I'L'$, $M'N'$ in $i\,l$, $l\,l'$, $l'\,l''$ ecc., $m\,n$, $n\,n'$, $n'\,n''$ ecc. e quindi si tirino le rette $l\,n$, $l'\,n'$ ecc. Evidentemente pel § 135 i punti l, l', l'' ecc. n, n', n'' ecc. saranno le prospettive di altrettanti punti obbiettivi, aventi rispettivamente le loro icnografie in I', M', e dividenti ciascuna serie, una retta verticale, in parti uguali agli intervalli $I\,L$, $M\,N$, quindi le rette $l\,n$, $l'\,n'$, $l''\,n''$ ecc. saranno le prospettive di rette parallele al piano geometrico, passanti pei punti obbiettivi che dividono le verticali testè accennate.

Avvertirò che sarebbe ottimo divisamento il dare alle rette $I\,L$, $M\,N$ una dimensione nota, per esempio di un braccio, o di un piede; nel qual caso le primordiali corrispondenti, rappresentando ne' loro intervalli una misura determinata, potrebbero sempre servire di scala per quelle dimensioni, che nella pratica dei pittori da teatro, per lo più appoggiata a regole analoghe a quelle che indicheremo nella Sez. III, sovente abbisognano.

226. Per le direzioni prospettiche delle linee delle quinte, parallele a quelle in quistione, si userà un metodo consimile, facendo a maggior comodo servire di normali i due segamenti delle stesse. Prendiamo a cagion di esempio la quinta projettata in $V''\,T$: dal punto T si segni la $P\,T$ parallela al lato $C\,A$, da V'' una $V''\,P$ tendente ad E punto di stazione, e dal punto P si produca

una $P P'$ parallela alla $V'' T$. Dal punto P' si segni un' altra retta concorrente in E e segante la $V'' T$, la quale sarà la $D P'$, e sul segamento corrispondente a T, si replicherà l' intervallo $P P'$ in $t t'$, $t' t''$ ecc. e l' altro intervallo $V'' D$, si replicherà sull' altro segamento in $p p'$, $p' p''$ ecc. Uniti i punti p', t'; p'', t'' ecc. con delle rette, queste saranno le linee primordiali che si cercano.

227. Riguardo alle fondamentali delle pareti in quistione, che dovrebbero corrispondere pure al piede di ciascuna di esse, egli è evidente, che considerato il piano del palco orizzontale, esse si confonderebbero colla $z z$, ma essendo questo piano inclinato, il piede anzidetto andrà a discostarsi dalla corrispondente fondamentale, a seconda dell' inclinazione nominata; ora andremo ad accennare il modo di trovare questa differenza, onde conoscere l' allungamento che accade in ciascuna parete anteriore al telone, per farlo, come già si disse, perdere nella prospettiva stessa. Rappresenti adunque $x r$ (Fig. XLII) la projezione del piano del palco su di un piano verticale, $p q$ quella del raggio principale, e le rette che poggiano in r, s, t, x quelle delle quinte e del telone. Dai punti ora accennati, si eccitino delle rette parallele alla $p q$ ad intersecare la $x' x''$, rappresentante il telone prolungato sotto il palco, e la distanza di queste sezioni dal punto x, indicherà quella che debbe avere il piede di ciascuna quinta dalla orizzontale comune, nella soprapposizione che dicemmo; nel qual caso è da riflettersi, che la

distanza sopradetta essendo determinata da rette parallele, gli intervalli tra queste sezioni saranno eguali, giacchè eguale abbiamo supposta la distanza tra le pareti di cui si ragiona, quindi essendo la situazione sul palco delle quinte, determinata dalle fessure invariabili di esso, egualmente costante sarà la differenza summentovata; perciò se il pittore avrà trovata una sol volta con simile processo, la distanza che passa tra una orizzontale eccitata da una fessura all' altra più vicina, questa gli servirà di norma per ogni composizione di scena.

228. *Delle linee parallele al piano geometrico, espresse su pareti non parallele, ma verticali* (Figura XLVI).

Rappresenti la scena una sala con aperture praticabili, nella quale vogliasi far uso dell' artifizio di cui si ragionò nel § 206. Disposte le projezioni delle pareti colle precauzioni note, e di più coll'avvertenza che le prospettive delle aperture praticabili cadano intiere sui piani delle quinte, che saranno, siccome avvertimmo nel citato §, inclinate a quello del telone con un angolo semiretto, si segni la retta di concorso NE, spettante ai lati della sala che debbono innoltrarsi sulle quinte, si prolunghino le projezioni o linee del taglio delle quinte stesse sino ad incontrare la prima, e sieno N, F, I, M i punti di tale unione. Sia X il telone, mp' la orizzontale, pp' la linea d'incontro spettante al telone, del piano della sala projettato in SP'', ed o il concorso delle linee

pertinenti ai lati già accennati della sala medesima. Prendansi gl'intervalli $F P''$, $N P'$, che saranno uguali, e si segnino sulla orizzontale da p' ad m, ed avendo segnate anche sulle quinte a destra le linee d'incontro del piano della sala la di cui icnografia è $S P''$, si soprappongano queste quinte al telone, per modo che le linee d'incontro ora accennate sieno soprapposte alla $p p'$ del telone, e le orizzontali formino una retta con quella del telone medesimo. Si prolunghino le direzioni prospettiche appartenenti al lato in quistione, già segnate sul telone, ad intersecare la $p p'$; evidentemente saranno queste sezioni i punti d'incontro spettanti alle varie pareti, delle obbiettive cui le corrispondenti prospettive rappresentano, pel § 215 II rispettivamente soprapposti; quindi da tali punti segnando delle linee concorrenti in m, queste indicheranno il prolungamento sulle quinte delle prospettive del telone. Una operazione simile servirà anche per le quinte del lato sinistro.

229. Per tracciare su queste quinte le linee prospettiche parallele a quelle appartenenti al lato projettato in $R S$, servirà una regola analoga a quella insegnata nel § antecedente per le quinte parallele al telone, vale a dire, prendendo ancora per esempio la quinta projettata in $A B$, si ecciti da un suo punto estremo A, una $A T$ parallela alla $R S$, e da B una $B T$ tendente ad E, e segante la prima in T; da T si produca una $T V$ di lunghezza qualunque ma parallela ad $A B$,

e da V una $V\,U$ concorrente in E, l'intervallo $T\,V$ si replicherà sul relativo segamento $a\,a'$ della quinta in quistione, e l'altra $B\,U$ su quello $b\,b'$, sempre cominciando dalla orizzontale, ed uniti i punti corrispondenti con delle rette, queste formeranno le linee primordiali che si cercano.

230. È osservabile in questa figura che le quinte di un lato, non sono infilate parallelamente al telone con quelle dell'altro lato, riguardo alle fessure nelle quali si suppongono scorrere. Questo io feci per non distaccare di troppo le quinte dagli obbiettivi che debbono rappresentare, e secondare la situazione della icnografia della sala; e siccome una tale corrispondenza non è niente necessaria alla illusione della prospettiva teatrale, così io credo inutile un tal legame, e che il pittore approfittando di una tale riflessione, possa a seconda delle circostanze, collocare le quinte in quel luogo che egli crederà più idoneo alla pratica ed all'effetto delle scene.

231. *Delle linee curve parallele al piano geometrico, espresse su pareti separate* (Fig. XLVII).

Rappresentino le quinte unite ed il telone, una sala semicircolare a colonne. Per tracciare sul telone le linee primordiali spettanti alle direzioni prospettiche delle linee esistenti sul muro, si segnino dai varj punti D, C, B, A della icnografia, le rette $D\,D'$, $C\,C'$, BB', AA', parallele alla linea del taglio corrispondente, e di uguale lunghezza. (Si osservi che se si prenderà sul diametro del semicircolo un punto X', distante da X quanto

una delle lunghezze accennate, e quindi col centro in X' e raggio DX si segnerà il semicircolo $A'D'Q'$, tutte le rette tirate dal semicircolo ADQ parallelamente al diametro ora detto, che è pure parallelo alla linea del taglio spettante al telone, saranno segate dal semicircolo $A'D'Q'$ di lunghezza eguale ad XX'.) Dai punti D, D'; C, C' ecc. si segnino le linee visuali $D'G', DG$; $C'F', CF$ ecc. coi punti I, O, F, G trasportati nella corrispondente fondamentale, si segnino le normali gg', ff', oo', ii', e sulla gg' si replicherà a piacere l'intervallo GG', cominciando dalla orizzontale, come è noto, sulla ff' l'intervallo FF' ecc. È bene avvertire che se si segnerà la linea d'incontro ll', che corrisponde al punto L, si potrà replicare su di essa l'intervallo XX'. Essendo gg' la direttrice, si trasporteranno dall'altro lato le ff', oo', ll', ii', ordinatamente coi relativi punti, i quali uniti rispettivamente ai primi con delle curve, queste costituiranno le linee primordiali spettanti al telone.

232. Per le quinte si userà lo stesso processo, cioè, prendendo per esempio la quinta projettata in NR, si guidino dai suoi estremi N, R e dal suo mezzo P, le rette MN, PY, RQ concorrenti nel punto di stazione, e seganti la curva in Q, Y, M; da questi punti si producano le rette $M'M$, $Y'Y$, $Q'Q$ parallele alla linea del taglio della quinta, ed eguali ad XX', e dagli estremi di queste delle altre rette $M'N'$, YP, $Q'R'$ concorrenti al punto di stazione, e seganti la linea

del taglio in quistione, od il suo prolungamento, e quindi l' intervallo RR' si replicherà sul segamento rr', quello PP' sulla corrispondente pp', e l'altro NN' su di nn', sempre cominciando dalla orizzontale come fu detto. I varj punti si uniscono con delle curve nel modo noto. Egli è poi cosa facile a comprendersi, che un tal metodo servirebbe egualmente per le quinte inclinate come nel § antecedente, ben inteso, che le rette MM', YY', QQ' prenderebbero le direzioni delle corrispondenti linee del taglio.

Credo inutile l' avvertire che le linee testè ritrovate servono unicamente per quelle esistenti sul piano da cui sono dedotte, giacchè è noto che le ellissi prospettiche variano continuamente di forma, a seconda che varia la situazione del relativo obbiettivo, e siccome in queste non evvi un dato onde appoggiarsi, come sarebbe per le rette il loro concorso, così è d' uopo, nel caso di esprimere curve su varj piani, trovare in ciascun piano le corrispondenti primordiali, nel qual caso servirà sempre di norma l'artifizio da noi insegnato, il quale renderassi sempre più utile, se si darà alle rette da cui si deducono, una misura costante e nota in tutti i piani, come di già dicemmo.

233. Resterebbe ora da parlarsi delle linee inclinate al piano geometrico, ma siccome ben di rado occorre nella pratica teatrale che tali linee s' innoltrino da una parete all'altra, ed altronde l' appoggiare le regole alla corrispondenza che le loro prospettive potrebbero avere sulle varie pa-

reti, porterebbe una operazione più fastidiosa e lunga, di quella che si richiede prendendo queste pareti separatamente, così noi rimanderemo in questo caso il prospettico alla Sez. I.

APPENDICE

Risguardante alcuni artifizj relativi alle pareti teatrali.

234. Avendo noi veduto nel decorso di questa sezione, che la situazione delle varie pareti viene ad essere col nostro sistema, determinata dal pittore da leggi cavate dalla prospettiva stessa, nell'atto che immagina ed eseguisce lo schizzo della scena, darò in quest'appendice un mio pensiero, intorno al metodo che si potrebbe adottare dallo stesso, onde istruire il macchinista che presiede al movimento delle medesime, sul modo di dar loro, senza tema d'equivoci, quella situazione che gli viene prescritta dalla prospettiva. Inoltre vedemmo nel § 206, che la inclinazione delle quinte sotto un angolo di 45 gradi, può tornar utile in certi casi alla più perfetta illusione delle scene, ma scorrendo queste quinte in tutti i teatri in fessure parallele all'imboccatura del palco, e riflettendo ben anche, che una tale disposizione è necessaria per altre circostanze che accompagnano l'uso del teatro e le rappresentazioni che in esso vengono eseguite, così, sembrandomi utile un artifizio atto a combinare l'uno e l'altro caso,

darò per ultimo le traccia di un meccanismo che sembrami adattato ad una tale circostanza.

Sul modo di determinare la situazione delle pareti sul palco, nei varj cambiamenti di scena.

235. Primieramente dovranno le guide dei carretti destinati a portare le quinte, essere numerizzate a guisa di scala, di braccia o d'altro, a seconda della pratica del paese, e questa scala s'intenderà avere il suo principio su di un piano che passi perpendicolarmente pel mezzo del palco scenico, e progredirà per ciascuno de' due lati, dalla parte opposta, così, supposto che la guida cominci a dieci braccia di distanza dal piano ora accennato, la scala comincerà colle dieci ed un'oncia, dieci e due, ecc. Tutte queste divisioni nei carretti, saranno marcate con un foro, nel quale vi si introdurrà una caviglia, come usasi generalmente in tutti i teatri. I carretti saranno pure distinti a destra e sinistra con un numero progressivo, cominciando dal più vicino al proscenio. Riguardo ai rompimenti ed al telone, s'intenderà tracciata la sezione del piano detto superiormente con quello del palco, e la misura per la loro situazione si rileverà da una scala segnata su di questa, la quale avrà il principio sul lembo del palco stesso.

Combinato questo, il pittore che avrà regolata la scena colle note precauzioni, segnerà una linea nel mezzo della pianta del palco, e rileverà

le distanze di questa dai varj segamenti spettanti alle quinte, e quelle dei rompimenti e del telone, dalla intersecazione della stessa colla linea che indica il lembo del palco; dalle quali distanze darà la nota al macchinista con apposita tabella, che spiegherà a cagione di esempio:

Sala Regia

Quinte a sinistra				Quinte a destra			
Quinte	Brac.	Onc.	Carretto	Quinte	Brac.	Onc.	Carretto
I	10	10	4.°	I	10	8	4.°
II	9	6	9.°	II	10	—	9.°
III	8	9	14.°	III	9	—	14.°
Rompimenti				I	br. 12,	onc. 6	
				II	» 16,	» -	
Telone					br. 24,	onc. -	

La presente modula potrebbe essere stampata, tanto per evitare l'incomodo al pittore di farla per ogni scena, quanto perchè riesca più intelligibile ai falegnami destinati al movimento delle tele, i quali affiggendola in luogo opportuno, potrebbe anche servire loro di norma pei cambiamenti diversi di scena, specialmente per la situazione delle caviglie che regolano il limite dell' avanzamento delle quinte.

Artifizio per dare alle quinte la inclinazione di cui si parlò nel § 206.

236. Si potranno tali quinte comporre con due telaj, uno stabilmente fermato al carretto sotto il palco, come si usa, e l' altro attaccato al primo con quattro o cinque cardini, in modo che si possa aprire per davanti. All' altezza poco più di un uomo saravvi un ferro, composto di due pezzi uniti a cerniera nel mezzo, e girevoli nelle altre estremità in due arpioni attaccati ai telaj, verso gli orli opposti a quelli dei cardini, e combinati in maniera che con una piccola spinta si possa piegare e raddrizzare: la sua lunghezza sarà tale, che, raddrizzato, il telajo mobile acquisti l' inclinazione richiesta. Piegato che sia questo ferro, i telaj potranno chiudersi e fermarsi tra loro mediante una cricca, e siccome nell' aprirsi del telajo mobile, questo incontrerebbe un piano più basso di quello su cui appoggiasi quando è chiuso, a cagione del pendío del palco, così dovrà questo telajo esser segato inferiormente con una inclinazione adattata, ed i cardini si faranno con un andamento di vite, e non cilindrici, e di più, per maggior solidità, saravvi praticata nell' orlo inferiore del telajo apribile, una girella scorrevole sul palco e mobile su tutti i sensi, per adattarsi ai varj moti di rotazione e traslazione.

Inteso questo, sembra manifesto anche il suo movimento, imperocchè, nel mentre che per di sotto al palco si spingerà tutta la quinta, il fale-

gname di sopra, rallentando la cricca, lascerà in libertà il telajo mobile, ed aprendolo, fermerassi di per sè nel luogo richiesto.

Esternati questi miei pensieri, io li sottopongo all'esame di quelli che in casi simili hanno, più che io non posso avere, pratica del teatro, per adattar loro quelle modificazioni che credessero più convenienti, oppure per trovare una via più facile di giungere allo stesso scopo. Basterà a me in questo caso, l'avere suggerito ciò che occorrerebbe per la pratica della prospettiva teatrale, eseguita col metodo in questa Sez. II insegnato, che io divisai soltanto per la voglia di esser giovevole alla condotta di quel divertimento, che oltre ad apportare un piacere utile ed istruttivo, promuove e combina tante belle arti insieme, e caratterizza lo spirito e l'indole di un colto pubblico, non che il di lui sviluppo.

SEZIONE III.

CAPO I.

DELLE REGOLE ABBREVIATRICI

237. Chiamo abbreviatrici quelle regole, le quali sono atte senza il sussidio dell' ortografia ed icnografia dell' obbiettivo, a presentarne la prospettiva. Benchè sembri al primo aspetto, che, non abbisognando a queste regole i due più complicati elementi di cui le altre non possono far senza, abbiano ad essere realmente in ogni caso più brevi di quest' ultime, ciò non è però senza restrizione, imperocchè la strada per giungere allo scopo riesce, nelle regole di cui si tratta, ben di sovente molto intralciata, per cui allungansi alcune volte quelle operazioni che colle altre riescirebbero più brevi, ben difficilmente possono presentare alla mente dell' operatore l'effetto dell' opera sua sì chiaramente, come si ottiene dalla icnografia ed ortografia dell' obbiettivo, e finalmente più che le altre imbarazzano, chi non abbia matura pratica, e non abbia formata una lunga abitudine di operare con esse.

Non inconveniente però potrà riputarsi il nome di regole abbreviatrici, con cui io distinguo queste dalle regole della Sez. I, quando si rifletta

che esse sono realmente suscettive di abbreviare l' operazione, ove si combinino opportunamente colle testè dette, come potrà chiaramente comprendere, chi vorrà darsi la pena di confrontare il metodo adoperato in questa sezione, con quello che abbisognerebbe operando colle regole della Sez. I onde ottenere un eguale scopo, e come si rileverà dalla pratica, se l'artista saprà servirsene giudiziosamente. Inoltre le regole di cui si ragiona, saranno di molto utile a quelli che hanno contratta l' abitudine di operare ad occhio; ai pittori da teatro, per esempio, pei quali il breve tempo concesso alle loro opere, fa sì che essi generalmente si servino di regole analoghe, potranno queste essere di molto giovamento. Mi è d' uopo confessare però, che alcune delle regole quivi accennate, forse non gli riesciranno nuove, pure mi lusingo che la maggior parte non saranno in questo caso, cosicchè io spero che anche questa sezione non riescirà inutile, e specialmente a quelli che, non ancora pratici, nel conoscimento di questa bell' arte vorranno incamminarsi.

Cominceremo, siccome facemmo nelle altre sezioni, da quelle investigazioni teoriche, le quali serviranno a far conoscere la verità da cui le operazioni grafiche sono dedotte, ed a persuadere il prospettico dell' esattezza delle stesse, non che a fargli concepire con più sicurezza dove e quando queste possono essere di sussidio alle altre, e quelle modificazioni di cui potrebbero abbisognare, per adattarle a quei casi che sono il soggetto delle grafiche delineazioni.

Teorie spettanti alle regole abbreviatrici.

238. *Se da un punto* E' (Fig. XII) *della linea di distanza* q' e', *venga guidata una* L O, *parallela a quella del taglio* f' o', *la quale seghi le linee visuali* n' e', t' e', *questa retta e la linea del taglio, saranno dalle intersecazioni delle linee visuali suddette e da quella di distanza, divise in parti, che rispettivamente a due a due, avranno fra loro tutte le ragioni che sussistono fra l'intiera linea or accennata, e la porzione di essa determinata dal punto* E', *da cui venne guidata la parallela nominata* L O.

Imperocchè essendo i triangoli $e' E' N$, $e' q' n'$; $e' N T$, $e' n' t'$ rispettivamente simili, si avrà

$$E' N, : q' n' : : N T : n' t' : : q' E', q' e'.$$

239. *Se da un punto* E' *della linea di distanza* q' e', *venga parallelamente alla retta di concorso* f' e' *di una data obbiettiva orizzontale, guidata una retta* S E', *sino a segare la linea del taglio* f' o'; *la porzione* S q' *di questa linea, compresa fra l'intersecazione* S *ora accennata e la projezione* q' *del punto principale, avrà al tratto* f e *di orizzontale, compresa fra il concorso* f *della citata obbiettiva ed il punto principale* e, *la stessa ragione che ha la parte* q' E' *della linea di distanza coll' intiera linea* q' e' *suddetta.*

Poichè a cagione dei triangoli $f' q' e'$, $S q' E'$ simili, si avrà $q' S : q E' : : q' E' : q' e'$; ed essendo $f e$ eguale ad $f' q'$, si avrà pure

$$e f : q' S : : q' E' : q' e'.$$

240. *Se da un punto* E′ *della linea di distanza* q′e′, *venga eccitata una parallela* S E′ *alla retta di concorso di una data obbiettiva inclinata al piano geometrico, sino a segare la linea del taglio* f′o′, *e che da tale intersecazione* S, *trasportata sopra la fondamentale* f″ o *in* f‴, *venga innalzata una normale* f‴ P, *questa segherà la retta* r e *che unisce il punto di concorso* r *della citata obbiettiva ed il punto principale* e, *in parti, che avranno fra loro e con tutta la retta, la ragione che sussiste tra le parti della linea di distanza, determinate dal punto* E′, *da cui venne eccitata la parallela* S E′, *con tutta la linea medesima.*

Giacchè evidentemente i due triangoli eQS', erf sono simili, perciò

$$eQ : er :: QS' : rf :: eS' : ef$$

ma essendo fS', $S'e$ eguali rispettivamente ad $f'S$, Sq', si avrà pure

$$eQ : er \text{ ecc.} :: q'E' : q'e'.$$

241. *Se da un punto* E′, *della linea di distanza* e′q′, *venga eccitata una* S E′ *parallela alla retta di concorso* f′ e′ *di una data obbiettiva, parallela oppure inclinata al piano geometrico, sino a segare la linea del taglio, e che quindi si guidi una normale* f‴ P *come fu detto nel* § *antecedente, le parti di questa e della direttrice* E q, *comprese fra la linea che unisce il concorso dell' obbiettiva ed il punto principale, e qualunque altra retta che parti dal suddetto punto di concorso e seghi le due prime, avranno*

rispettivamente fra loro, la ragione che hanno le parti della linea di distanza, determinate dal punto E′, *coll' intiera linea ora accennata.*

Immaginiamo in primo luogo orizzontale la obbiettiva detta nell'enunciato, ed f il suo punto di concorso. Evidentemente segnando le fE, fE'' seganti la Pf''' e la Eq, si avranno i triangoli fXS', fEe; $fS'X'$, feE'' rispettivamente simili, perciò $eE : S'X :: eE'' : S'X' :: eS' : ef :: q'S : q'f' :: q'E' : q'e'$.

Supponendo ora l' obbiettiva inclinata ad r il suo concorso, ed unendo colla re i due punti r, e, e quindi segnate le rE, rE'' seganti le Pf''', Eq, si avranno pure i triangoli rQP, reE; rQP', reE'' rispettivamente simili, e perciò

$$eE : QP :: eE'' : QP' :: q'E' : q'e'.$$

242. *Il concorso della diagonale di un quadrato posto verticalmente con due lati orizzontali, è distante da quello della sua icnografia, di quanto è la lunghezza della retta di concorso corrispondente.*

Essendo la diagonale di un quadrato situato come fu detto, inclinata ad angolo semiretto col piano geometrico, veggasi la dimostrazione al § 52.

243. *Il punto di concorso della diagonale* C A′ (Fig. III) *di un rettangolo* A C C′ A′, *avente due lati orizzontali e due verticali, è distante da quello della sua icnografia, una quarta proporzionale dopo le seguenti quantità lineari,* 1.° *Un lato orizzontale del rettangolo,* 2.° *Uno verticale,* 3.° *Il raggio, oppure la retta di concorso, che è lo stesso, spettante ai lati orizzontali.*

Rappresenti $q E$ il raggio di concorso della diagonale, $m E$ quello dei lati orizzontali, e $q m$ una retta che unisce i due concorsi q, m. Essendo $m E$ parallela a $C A$, $q E$ parallela a $C A'$, e $q m$ a $C C'$, i triangoli $C C' A'$, $q m E$ saranno simili, perciò

$$C' A' : C C' :: m E : q m.$$

244. *Il punto di concorso delle diagonali di un cubo o di un parallelepipedo rettangolo qualunque, avente due facce orizzontali, è distante da quello della sua icnografia, una quarta proporzionale dopo le seguenti quantità lineari.* 1.° *La diagonale di una delle sue facce orizzontali.* 2.° *Uno de' suoi spigoli verticali.* 3.° *Il raggio o la retta di concorso degli spigoli orizzontali.*

Rappresenti $A C C' A'$ (Fig III) la sezione di uno dei solidi enunciati, fatta da un piano passante per una sua diagonale ed i spigoli verticali. Sia $q E$ il raggio di concorso spettante alla diagonale suddetta, $m E$ quello degli spigoli orizzontali, e $q m$ una retta che unisce i due concorsi q, m. Noi abbiam veduto nel § antecedente la proporzione che sussiste da una tale combinazione di linee, ma $C A$ è evidentemente uguale ad una diagonale di una delle facce orizzontali del solido, e $C C'$ ad uno de' suoi spigoli verticali, perciò ecc.

245. *I punti di concorso delle diagonali di due quadrati o rettangoli eguali, posti a diverse posizioni ma verticali, ed aventi un lato orizzontale, sono verticalmente distanti da quello della corrispondente icnografia, di quanto è la*

lunghezza di una quarta proporzionale dopo le seguenti quantità lineari, cioè, prendendo per base della proporzione qualunque dei due quadrati o rettangoli, 1.° *Il raggio di concorso della icnografia dell' altra posizione,* 2.° *Il raggio di concorso della icnografia della posizione corrispondente,* 3.° *La distanza del punto di concorso della posizione detta in primo luogo, da quello della corrispondente icnografia.*

Rappresentino $E e$, $E m$ (Fig. III) i raggi di concorso delle icnografie di due posizioni spettanti alle diagonali enunciate, ed $r E$, $p E$ i raggi di concorso delle obbiettive corrispondenti alle posizioni che sopra dicemmo, è evidente che questi ultimi, a motivo della costante inclinazione delle diagonali col piano geometrico, saranno egualmente inclinati alle rette $e E$, $m E$, che sono orizzontali e rispettivamente esistenti con essi raggi in piani verticali. Di più è evidente che gli angoli indicati in $r e E$, $p m E$ debbono essere retti, quindi i triangoli $r e E$, $p m E$ saranno simili, e perciò avrà luogo la seguente proporzione $E m : e E :: m p : r e$ per la posizione spettante al piano $r e E$, e viceversa $e E : m E :: r e : p m$ per quella corrispondente al piano $p m E$, perciò ecc.

246. *Se le prospettive di linee obbiettive parallele ed esistenti su di un piano verticale, ma però inclinate al piano geometrico, vengono segate da due linee, l' una verticale e l' altra inclinata, queste due rette così segate in parti dalle dette prospettive, potranno considerarsi come im-*

magini di due rette obbiettive esistenti sul menzionato piano, e divise in parti fra loro rispettivamente proporzionali.

Sieno le prospettive delle linee obbiettive parallele le HG, $H'G'$ fino ed EM (Fig. LXIV), sia MN la retta verticale ed NE quella inclinata: si ritenga il piano FAN, che è la parete, collocato nella sua vera posizione rispetto al piano in cui esistono le obbiettive. S' immaginino due piani passanti pel punto di vista e per le due NM, NE protratti sino a segare il piano in cui esistono le obbiettive parallele; è chiaro che le intersecazioni dei due piani col piano obbiettivo, rimarranno segate dalle obbiettive stesse, in parti che avranno le loro rappresentazioni in NG, GG' ecc. NH, HH' ecc. e che tali parti saranno fra loro proporzionali, giacchè la serie dei triangoli obbiettivi rappresentati in NHG, $NH'G'$ ecc. avranno l' angolo in N comune ed i lati HG, $H'G'$ ecc. paralleli, e quindi ecc.

247. *Se le prospettive di linee obbiettive parallele, ed esistenti su di un piano orizzontale, ma però inclinate alla parete, sono segate da due rette, l' una parallela alla parete e l' altra inclinata alla stessa, queste due rette così segate in parti dalle prospettive, potranno considerarsi come immagini di due rette obbiettive esistenti nel menzionato piano, e divise in parti fra loro rispettivamente proporzionali.*

Serve il ragionamento antecedente, permutando nella posizione orizzontale tutto il sistema verticale del suddetto § antecedente.

CAPO II.

DIMOSTRAZIONE GRAFICA DELLE REGOLE ABBREVIATRICI

248. *Non essendo segnato il punto di stazione, tracciare varie linee che passino per esso* (Figura XLVIII).

Sia *q e*, per esempio, la quarta parte della linea di distanza, e *g o* una retta che passa per *e* parallelamente alla linea del taglio *i a*. Prendasi un intervallo qualunque, e cominciando da *q*, si replichi sulla *i a* quante volte si vuole, *q l*, *l m*; *q h*, *h i*. Se segnerannosi sulla *g o*, cominciando da *e*, le parti *e n*, *n o*; *e f*, *f g* uguali a tre quarti delle prime, e pei punti *l*, *n*; *m*, *o*; *h*, *f*; *i*, *g*, si faranno passare rispettivamente delle linee, queste concorreranno nel punto di stazione (§ 238).

249. *Tracciare sulla parete varie rette tendenti ad un dato concorso sulla orizzontale, ancorchè questo non sia segnato* (Fig. XLVIII).

Sia come nel § antecedente *q e* la quarta parte ecc. Sia inoltre *N A* la orizzontale, *E* il punto principale, *G E* la direttrice, e sia *e a* una retta parallela alla retta di concorso spettante a quel punto di concorso a cui voglionsi dirette le linee enunciate. L'intervallo *q a* si trasporti in *E A*, e su *A* s'innalzi la *I A* parallela alla direttrice, prendansi su questa, cominciando da *E*, le parti *E C*, *C H*, *H G* di dimensione arbitraria ma eguali, e sulla *I A*, cominciando da *A*, si repli-

chino le parti $A F$, $F L$, $L I$ minori di un quarto delle prime, e tracciate pei punti C, F; H, L; G, I delle rette, queste saranno le ricercate (§ 241).

250. *Segnare varie linee dirette ad un punto di concorso fuori della orizzontale, indipendentemente da questo* (Fig. XLIX).

Sieno gli elementi spettanti alla icnografia ancora quelli della figura antecedente, e sia $N A$ la orizzontale, E il punto principale, ed $M E$ la direttrice. Rappresentino, la $f' e'$ un'obbiettiva parallela al piano geometrico, e le $f' g'$, $g' e'$ due altre inclinate con angolo uguale alla medesima; esistino tutte e tre queste rette su di un piano verticale parallelo alla $e a$ (Fig. XXVIII), e vogliasi inoltre che le linee enunciate sieno dirette rispettivamente ai concorsi delle $f' g'$; $g' e'$. Prendasi sulla $f' e'$ la parte $a' e'$ eguale ad $a e$, su a' s'innalzi la $a' b'$ perpendicolare alla $f' e'$, e la $g' e'$ si prolunghi ad intersecare la $a'b'$. Prendasi pure $E A$ eguale ad $e a$, e si faccia passare per A la $F G$ parallela alla direttrice; su questa $F G$ si segnino le parti $B A$, $A G$, eguali a $b' a'$, e per E ed i punti B, G tracciate due linee, $E B$, $E G$, queste passeranno rispettivamente pei concorsi delle $f' g'$, $g' e'$ accennate (§ 240). Si segnino quindi sulla $M E$ le parti $E O$, $O P$, $P M$ eguali, e prendendo un intervallo minore di un quarto delle parti accennate, se queste si replicheranno in $B C$, $C D$, $D F$ cominciando da B, le linee che si tracceranno dai punti O, C; P, D; M, F passeranno pel punto di concorso superiore alla orizzontale, e viceversa

passeranno pel punto di concorso inferiore, se gli intervalli medesimi incominceranno da *G*, come accade delle rette *OH, PI, ML* (§ 241).

251. *Determinare qualunque punto di concorso, indipendentemente dal punto di stazione.*

Siccome nella maggior parte delle figure appartenenti alla Sez. I, si siamo serviti, a motivo dell' angustia delle tavole, di una parte aliquota della linea di distanza, così daremo quivi il modo di trovare i concorsi di alcune di queste figure, servendosi di questa parte aliquota, acciò possa il giovane studente, non solo conoscere la maniera di operare in tali casi comunissimi nella pratica della prospettiva, quando voglia evitare gli incomodi che ne derivano, ma anche acciò possa confrontare, se gli fosse utile per la più chiara intelligenza delle dimostrazioni, le figure stesse, giacchè queste sono eseguite con accurata esattezza.

Cominceremo dalla Fig. XIII, ove *HN* è la quarta parte della linea di distanza: si segnino dal punto *N* le rette *TN*, *NS* rispettivamente parallele ai lati *DC*, *BD*. L' intervallo *TH* replicato quattro volte a sinistra del punto principale *e*, darà nell' ultimo punto il concorso spettante alla faccia *dcpr*, e l' altro intervallo *HS* replicato quattro volte a destra di *e*, darà in *s* il concorso spettante all' altra faccia (§ 239).

252. Egualmente per la Fig. XIV ove *HN* è pure un quarto della relativa linea di distanza, segnate le rette *SN, NT*, rispettivamente pa-

rallele ai lati $B D$, $D C$, come pure la $N L$ parallela alla diagonale $A D$, e replicati quattro volte gli intervalli $S H$, $H L$ e l'altro che cade fuori della tavola e chiamerò $H T$, sulla orizzontale, ordinatamente rispetto al punto principale e, come gli altri S, L, T lo sono alla projezione del medesimo indicata in H, si avranno i punti di concorso spettanti alle due facce della piramide ed alla diagonale $d a$ della base (§ cit.).

253. Veniamo ora alla Fig. XVIII ove $z' y'$ è ancora la quarta parte dell'intiera linea di distanza. Cominciando dalle rette parallele al piano geometrico, le quali hanno le loro icnografie in $a' c'$, $b' d'$ ecc. segnisi la $m' z'$ parallela alle suddette, ed ove questa incontra la $i' x'$ prolungata, avrassi un quarto della distanza dal punto principale del punto di concorso spettante ai lati ora nominati. Riguardo agli altri concorsi, i quali appartengono a rette inclinate col piano geometrico, e però cadono fuori della orizzontale, si segni la $z' x'$, parallela alle icnografie delle rette ora accennate, e quindi, pel concorso spettante ai lati projettati in $f' l'$, $b' a'$ ecc. si segni la $Z X$ eguale a $z' x'$, di poi la $Y' X$ facente colla $Z X$ l'angolo che le obbiettive fanno col piano geometrico, oppure, giacchè le dette obbiettive sono projettate sul piano ortografico, essendo questo piano parallelo alle stesse, si faccia $Z X$ parallela alla fondamentale ortografica $I Y$, ed $Y' X$ parallela a $B A$, indi si innalzi $Z Y'$ perpendicolare a $Z X$: ciò fatto l'intervalto $y' x'$ si trasporti in $e x'$ e si abbassi la

$x'x''$ eguale ad $Y'Z$ e parallela alla direttrice, e per e ed x'' prolungata la ex quadrupla di ex'', darà in x il concorso cercato (§ 240), oppure ex' replicato quattro volte sulla orizzontale, darà x''', dal qual punto abbassata la $x'''x$ parallela alla direttrice e quadrupla di $Y'Z$, si avrà, come nel primo caso, x pel concorso in quistione. Per quello appartenente ai lati projettati in $f'b'$, $h'd'$, si prenda una VU, per l'angustia del luogo la metà di $z'x'$ e parallela ad IY, indi la VT parallela a BH, e la UT perpendicolare a VU: innalzando su x''' una normale otto volte maggiore della TU, avrassi nell' ultimo punto il concorso che si cerca.

Per via d'esercizio determineremo i concorsi spettanti alle diagonali projettate in $b'c'$, $d'a'$, ecc. onde conoscere come un tale artifizio s' accordi colla regola insegnata nel § 113, vale a dire col caso che il piano ortografico non sia parallelo alle linee obbiettive, come è appunto quello delle diagonali ora menzionate. Avendo segnate le solite $z't'$, $z'u''$ parallele alle icnografie, si traccino pei punti t' ed u'' le due $t't''$, $u''m''$ facenti colla iu'' l'angolo che la fondamentale ortografica, posta nella sua vera situazione, fa colla linea del taglio, che nel caso della figura risulteranno parallele alla IY, indi dal punto z' si ecciti una $m'm''$ perpendicolare alle $t''t'$, $m''u''$ ora dette, ed avendo segnata a parte la $Z'U''$ eguale ad $m''u''$ e parallela ad IY, e preso un punto U' sulla stessa distante da Z' quanto $t''t'$, si segneranno le due $Y''U'$, $Y'''U''$ parallele a BA, ed avendo pure segnata la $Y'''Z'$ perpendicolare a

$Z'U''$, si avranno le due $Y'''Z'$, $Y''Z'$, le quali quadruplicate nel modo più volte accennato, determineranno i due punti di concorso in quistione.

254. *Data la prospettiva di una superficie parallelogramma, trovare quella del suo punto di mezzo* (Fig. L).

Sia la superficie data la $IACH$; si segneranno dagli angoli opposti le rette AH, IC, che determineranno nella scambievole sezione L il punto cercato.

255. *Data la prospettiva di un parallelepipedo, trovarne quella del punto medio* (Fig. L).

Dagli angoli diametralmente opposti si segnino le linee AB, DC, che daranno nella sezione G il punto che si vuole. Oppure, nel caso che alcuno di questi angoli fosse nascosto, si troverà il punto F, come nel § antecedente, e per F condotta una FG al punto di concorso dei lati IA, HC, ove questa segherà una delle diagonali prospettiche del solido, sarà pure la prospettiva del mezzo di esso. Si osservi che se il punto principale fosse inferiore al lato DI, la orizzontale segherebbe i tre spigoli DB, IH, AC, e che per lo scopo di cui si tratta, sarà indifferente prendere piuttosto gli angoli D, I, A, che le analoghe sezioni della orizzontale ora accennata.

256. *Determinare la lunghezza di varie verticali piantate su piani orizzontali* (Fig. LI).

Sia no la orizzontale, pq la fondamentale, ed i punti d, f, g, h quelli su cui debbono insistere le verticali dimandate, le quali si vorrebbe

che rappresentassero tante rette uguali a BC ed insistenti sopra gli obbiettivi dei punti dati. Si prenda un punto A sulla no, ed a questo si conducano le rette BA, AC, ed avendo dai punti d, f, g tracciate le Dd, Gg, Ff, parallele alla pq, si farà la verticale dd' eguale a DD', ff' ad FF', e gg' a GG', ed avransi determinate le lunghezze di quelle rette che si suppongono appoggiate al piano geometrico. Per quella insistente su h, si traccerà la orizzontale hi e da i la verticale il, quindi la orizzontale lH', e farassi hh' eguale ad HH'.

257. *Trovare la prospettiva di un cubo avente una faccia nel piano geometrico* (Fig. LII).

Rappresenti E il punto principale, PH l'orizzontale ed ME la direttrice. Prendasi su questa la parte ME eguale al raggio principale, si conduca la MP in modo che faccia l'angolo PME eguale a quello che farebbe la icnografia di uno dei lati del cubo proposto colla linea di distanza, e di poi la MH ad angolo retto colla MP predetta. Essendo ME eguale al raggio principale e perpendicolare alla PH, rappresenteranno le MP, MH i raggi di concorso spettanti agli spigoli orizzontali del cubo, adattati alla parete per una rotazione intorno alla PH, e quindi saranno P, H i rispettivi concorsi.

Su H s'innalzi la HO parallela ad ME ed eguale ad MH, e su P la PN parallela pure ad ME ed eguale a PM, ed O sarà il concorso della diagonale di quella faccia del cubo i di

cui lati orizzontali concorrono in H, ed N il concorso della diagonale di quella faccia avente i lati orizzontali convergenti verso P (§ 242). Si determini ora a piacere in BG la lunghezza e la situazione di uno spigolo verticale del cubo, e da' punti B, G si eccitino le BA, GL; DG, CB, concorrenti ciascuna nei rispettivi punti P, H, queste rappresenteranno gli spigoli orizzontali del cubo, indeterminati dalla estremità opposta allo spigolo BG, ma dall' angolo G segnando le diagonali GO, GN, e dalle sezioni A, C di queste coi rispettivi spigoli CB, BA tracciando le AL, CD parallele a BG, avrassi in $ABCDGL$ l'intiera prospettiva del cubo.

258. *Di un parallelepipedo avente una faccia nel piano geometrico, e le verticali uguali fra di loro* (Fig. LII).

Si segnino le PM, MH nel modo che vedemmo nel § antecedente, come pure su H, P, le HO, PN, ma indefinite dalle estremità O, N. Si prenda sulla OH un intervallo XH eguale ad uno spigolo orizzontale del solido, ed un intervallo YH eguale ad uno spigolo verticale, ed uniti M, X, si produca da Y una mY parallela alla prima e segante la MH in m. (Si osservi che se i spigoli verticali fossero più lunghi degli orizzontali, allora bisognerebbe prolungare le due MH, MP oltre il punto M.) L'intervallo mH si trasporti in HO' per avere in O' il concorso delle diagonali delle facce appartenenti al concorso H (§ 243). Da m si ecciti una mm' parallela alla PH,

e l'intervallo $m'P$ trasportato in $N'P$, darà in N' il concorso corrispondente alle altre facce (§ 245). Determinato di poi, siccome vedemmo nel cubo, lo spigolo verticale in BG', si operi in maniera analoga a quella insegnata per questo.

259. *Di un prisma ottagono avente una base nel piano geometrico* (Fig. LIII).

Rappresenti bf la orizzontale, e il punto principale, e sia la normale ae eguale ad un quarto del raggio principale. Per non confondersi nel ritrovamento dei punti di concorso, si costruisca a parte il poligono X, nella posizione in cui si vorrebbe vedere il prisma, oppure le sole linee che lo dividono nel mezzo, giacchè vedesi che le stesse sono parallele a' suoi lati, indi dal punto a si producano le ab, ac, ad, ag, parallele ciascuna ad una delle predette linee, ad incontrare la orizzontale. Si determini ora il punto l nel modo stesso che determinammo il punto m nel § antecedente, servendosi di uno spigolo verticale e di uno orizzontale del prisma, e per esso punto l si ecciti lg parallela a bf, quindi sui punti b, c, d ed f che cade fuori della tavola, s'innalzino le normali bb', cc', dd', ff' uguali alle rispettive distanze bl, ci, dh, ecc. e siccome abbiam preso ae un quarto del raggio principale, così se dal punto e e gli altri b', c', d', f', (supposto sempre quest' ultimo a suo luogo) si produrranno delle rette, e sulle stesse si quadruplicheranno gli rispettivi intervalli eb' ec' ecc. cominciando da e, l'ultimo punto di ciascuna sarà il concorso della dia-

gonale della corrispondente faccia del prisma. Così pure gl' intervalli *e b*, *e c*, *e d*, *e f* quadruplicati sulla orizzontale, ciascuno dalla corrispondente parte, daranno il concorso degli spigoli orizzontali dello stesso prisma. Di tutti questi punti noi non abbiamo a suo luogo nella tavola che i soli c'', d'': nel corso della dimostrazione però s'intenderanno esistenti nel suo vero sito, e di questi, quegli appartenenti a spigoli orizzontali, distingueremo colle lettere b'', c'', d'', f'' e quelli spettanti alle diagonali, colle b''', c''', d''', f'''.

Preparata l'operazione in questa guisa, s'incominci dal determinare la situazione e la lunghezza di uno spigolo verticale del prisma, e sia questo *O C*; dai punti *C*, *O* si segnino le linee *P O*, *D C*; *O N*, *C B* dirette ai rispettivi punti di concorso b'', f'', indi dal punto *C* le diagonali *P C*, *C N* tendenti la prima a b''' e la seconda ad f'''; queste diagonali segheranno i corrispondenti spigoli nei punti *P*, *N*, e determineranno le lunghezze prospettiche dei medesimi; dai punti *P*, *N* abbassate le *P D*, *N B* parallele alla *O C*, avransi in *P O C D*, *O C B N* due facce del prisma in quistione. Dai punti *N*, *B* si eccitano le due *N M*, *B F* tendenti a d'', e da *B* la *B M* diretta a d''', ed avendo così determinato il punto *M*, si abbasserà da questo la *M F*, che compirà la faccia *N M F B*. Lo stesso dicasi della faccia *Q P D H*.

Rimane ora da segnarsi il contorno *QRSTM*: a questo scopo si conducano dai punti *Q*, *M* ai rispettivi concorsi c'', d'' le due indefinite *Q R*,

T M, quindi dal punto *O* ai punti *c''*, *d''* suddetti, le *O R*, *O T*, e finalmente dai punti *R*, *T* si guidano le due *R S*, *S T* ai rispettivi concorsi *f''*, *b''*. Oppure, volendo evitare l'incomodo cagionato dalla soverchia distanza dei punti di concorso ora accennati, si potrà determinare il punto *S* colle due *P S*, *N S*, guidate dai punti *P*, *N* rispettivamente ai concorsi *d''*, *c''*.

260. *Data la prospettiva di una superficie rettangolare con due lati verticali, trovare l'immagine di linee verticali dividenti la superficie obbiettiva in parti uguali* (Fig. LIV).

Sia *A I L N* la superficie da dividersi, a cagion di esempio, in sei parti eguali; preso un intervallo qualunque *N G*, questo si replichi sei volte sulla *A N*, e dai punti che ne risultano si segnino delle linee inclinate al concorso *F* dei lati orizzontali; dalla sezione *E* dell'ultima di queste linee *E M* colla *I L*, si guidi una retta al punto *N*, e dalle sezioni di questa retta colle linee inclinate ora accennate, si segnino delle linee parallele alle *A N*, *I L*, ed avrassi diviso lo spazio nel modo enunciato (§ 246).

261. *Del modo di segnare in uno spazio conveniente un dato numero di pilastri* (Fig. LV).

Rappresenti *A X P B* uno spazio prospettico il quale debba contenere cinque pilastri, e sia *I* il concorso dei lati orizzontali *A X*, *P B*. Seguinsi sulla retta *A B* gli spazj *B L*, *L M* di grandezza arbitraria, ma in modo che il primo sia al secondo, come la larghezza di un pilastro al cor-

rispondente vano, e si replichino sulla *A B* in maniera che il quinto spazio corrispondente ad *L B*, sia l'ultimo. Dal punto *T* si segni la *N T* diretta ad *I*, e dalla sezione *N* la *N B*; da tutti i punti ove la *N B* viene intersecata dalle linee concorrenti in *I*, come si mostra nella figura, si segnino delle linee parallele alla *A B*, e queste formeranno la larghezza de' pilastri e dei corrispondenti vani.

Resta ora da determinarsi la grossezza o fianco dei pilastri medesimi; a quest'oggetto dai punti *A*, *B* si segnino le *A S*, *B Q* parallele alla orizzontale, oppure concorrenti ad un punto, secondo la prospettiva richiede. Nel primo caso il rettangolo *A S Q B* si proporzionerà in modo simile alla ortografia di lui, e nel secondo si troverà il punto *S* in modo analogo al ritrovamento di *A* nella Fig. LII (§ 258), oppure anche ad occhio se non fosse necessaria una rigorosa corrispondenza nelle due facce visibili dei pilastri. Il punto *S*, come è noto, determinerà *S Q*. Segnata in questa guisa l'intiera prospettiva di un pilastro, si produrrà da *S* una retta diretta ad *I*, ed avendo pure dai punti *X*, *Z*, *V*, *O* tracciate delle linee parallele ad *A S*, oppure tendenti al concorso di essa, ove queste saranno segate dalla *S I*, ivi si avranno altrettanti punti per tracciare le linee che compiono le prospettive degli altri pilastri, come è agevole il comprendersi dalla figura stessa.

262. *Segnare nel membro apposito di una data cornice già ridotta in prospettiva, un dato numero di dentelli* (Fig. LVI).

Rappresenti *A B D C* la facciata del membro nel quale si debbano intagliare nove dentelli. È noto agli architetti che dividendo in due parti uguali un dentello, una di queste parti forma lo spazio tra un dentello e l'altro, e che la grossezza di un dentello, resta pure tanto da una parte che dall' altra di tutta la serie di essi, ove si colloca comunemente un ornamento a foggia della frutta di un pino. Computando adunque le quattro parti che comprendono questi due spazj, i dentelli divisi in due, e gli intervalli tra loro, si avranno trenta parti uguali. Ciò posto si prolunga la *A C* dalla parte di *C*, e su questo prolungamento si segnano trenta parti eguali, le quali sono nella figura comprese fra *C* e *G*. Dai punti *G*, *D* si protragga una linea *E G*, la quale incontri una verticale innalzata su *F*, concorso dei lati orizzontali della cornice. Dei punti che comprendono le trenta parti, computando *C*, solo serviranno il 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29, e da questi si segneranno delle linee concorrenti in *E* e seganti lo spigolo *C D*, dalle quali sezioni innalzando delle linee parallele ad *A C*, sarà diviso il rettangolo *A B C D* come richiedesi dalla natura dell' ornamento di cui si ragiona. Il resto rendesi per sè manifesto.

263. *Disegnare la facciata o fianco di una fabbrica, in uno spazio conveniente già ridotto in prospettiva* (Fig. LVII).

La ortografia posta superiormente alla prospettiva, serve ad indicare l' idea che potrebbe

avere in mente l'artista per l'operazione di cui si tratta. Ciò posto sia $ryvp$ il rettangolo prospettico corrispondente al rettangolo generale della fabbrica. Dalla estremità p dello spigolo rp si segni la qp facente col primo un angolo qualunque, e su questa qp si segnino i punti indicanti le distanze tra le varie linee orizzontali insistenti sul piano della fabbrica stessa, vale a dire, l'altezza dei zoccoli inferiori e superiori, i lembi superiori ed inferiori dei vani delle finestre, ed il principio e la fine delle cornici, indi uniti i due punti estremi q, r si segnino dai punti intermedj ai q,p, altre linee parallele alla rq le quali seghino lo spigolo rp. Da tutte queste sezioni conducendo delle rette tendenti al concorso x, queste indicheranno la prospettiva delle linee orizzontali sopraccennate.

Per avere la prospettiva delle linee verticali, si prendono le varie larghezze su di una retta, come vedesi in AB, BC, CD ecc. Si osservi che essendo la retta AP più lunga dell' altezza prospettica della fabbrica, sarà meglio, per tenere in raccolto spazio tutta l'operazione, ridurre proporzionalmente in minore dimensione gli spazj AB, BC, CD ecc. per esempio su di una ZZ parallela alla AP, mediante le rette tracciate dai punti A, B ecc. e tendenti al punto comune X; questi spazj poi si trasportano sullo spigolo rp cominciando da p, come vedesi in a, b, c, d, ecc. Per a si segna la as concorrente in x, e da s e p la sp; avendo poscia dai punti b, c, d, ecc. con-

dotte altre rette tutte concorrenti in x, l'incontro di queste colla sp determineranno le larghezze di cui si ragiona, in modo analogo ai tre §§ passati, e come si può facilmente scorgere osservando la figura.

Il modo di trovare la prospettiva delle linee sporgenti dal vivo del muro, si comprenderà più chiaramente dalle operazioni susseguenti.

264. *Del modo di servirsi di scale geometriche, onde determinare le larghezze e le altezze di varj oggetti prospettici* (Fig. LVIII).

Vogliasi che la prospettiva rappresenti l'interno di una sala, veduta fuori dell' angolo retto, la quale debba avere in tutte e tre le pareti visibili, due finestre laterali ed una porta nel mezzo: sia e il punto principale, ix l' orizzontale, zp' la fondamentale, op' una verticale insistente sulla estremità p' della fondamentale ora accennata, e sia $zo''op'$ il rettangolo che debbe racchiudere l'intiera prospettiva. Si segni primieramente il piccolo quadrato $abcd$ con quella inclinazione che vorrebbesi dare alla prospettiva della sala, il quale tocchi la fondamentale con un angolo b, ed i di cui lati sieno di una dimensione nota, per esempio di un braccio; di questo quadratello si protrarranno i lati ad, dc sino a toccare la fondamentale stessa in g, f, sulla quale si segneranno, cominciando da p', tanti intervalli uguali a gb, prolungandoli a piacere dalla parte di z. S' innalzi ora su e la normale he di un braccio pure, e dal punto h si producano le hl, hi sino a toccare

l' orizzontale ne' punti i, l, e parallele rispettivamente ai lati del quadratello $a\,d\,b\,c$. Ciò fatto si fissi la lunghezza del raggio principale; sia questa dieci braccia; in tal caso non farassi che replicare dieci volte l'intervallo $e\,l$ a destra di e, per avere in l' il concorso spettante ai due lati di fianco della sala (§ 239), e replicando pure dieci volte alla sinistra di e l'intervallo $i\,e$, avrassi nell'ultimo punto, che chiameremo i', il concorso spettante al lato medio. Sulla retta $o\,p'$ poi si segneranno altrettante parti di un braccio ciascuna, e potranno prolungarsi a piacere oltre il punto o.

Preparati in tal guisa i primi elementi dell'operazione, s'incominci dal punto p' a tracciare $p'\,u'$ diritta ad l' di dimensione arbitraria, da u' si segnerà la $u'\,t'$ tendente ad i', e volendo la parete media, per esempio di quindici braccia, si prenderanno quindici parti della $z\,p'$; le quali determineranno per conseguenza la $n\,t'$, compiendo in questa guisa le prospettive delle sezioni delle pareti della sala col pavimento. Sui punti t', u' poi si innalzeranno due verticali, le quali rappresenteranno le sezioni delle pareti tra loro, le di cui dimensioni si caveranno dalle parti segnate sulla $o\,p'$, in modo facile a comprendersi.

Immaginiamo ora che i lembi verticali della luce delle finestre debbano essere distanti dalle corrispondenti pareti laterali della sala, i primi 2 braccia e mezzo ed i secondi 4 ed un quarto. Segninsi i due punti f', f il primo distante da p' due parti e mezza della scala segnata sulla fondamentale, ed il

secondo 4 ed un quarto delle stesse parti, e così dall'altro lato (sempre intendendosi che la misura incominci ove le zp', nt' si uniscono), e da questi punti segnati delle linee concorrenti in l', ove queste incontrano la $t'u'$, s'innalzeranno delle verticali che indicheranno le situazioni delle prospettive dimandate. Lo stesso facciasi pei spigoli verticali della porta. Le altezze poi si caveranno dalla op', riferendole alla $o'u'$ mediante il concorso l', come scorgesi dalle linee punteggiate nella figura stessa.

Veniamo ora alle pareti laterali della sala. La scala spettante a queste pareti ha per unità la dimensione bf, la quale andrebbe segnata sulla fondamentale in modo simile a quella già ivi marcata, e le sue parti riferite alle $u'p'$, nt' mediante il concorso i'; ma una sì soverchia dimensione non può che essere di grave incomodo alla pratica, perciò si sostituisca la più comoda operazione che sono per indicare. Si tracci da t' la indefinita st' parallela alla fondamentale, indi si prenda sulla orizzontale un punto r il quale sia in linea retta coi due t', f, indi un altro punto s sulla st in linea retta coi due r, b. Da questo punto s si segni la su concorrente in i', la quale seghi le due nt', $u'p'$ nei punti indicati t, u. Si traccino, per non confondere le scale insieme, le due zz', pm parallele alla fondamentale, indi da un punto qualunque y sulla orizzontale, preso come concorso, e coi due punti t', t si segnino le due $t'z'$, tv seganti la zz', e l'intervallo vz tra queste sezioni, si replichi sulla zz' stessa. Così pel lato destro preso un punto x sulla

orizzontale, e dai punti u, u' segnate due rette concorrenti in x e seganti la pm, l'intervallo tra queste sezioni si replicherà sulla stessa. Le parti segnate sulle due zz', pm, ora accennate, indicheranno un braccio ciascuna, e si riferiranno alle corrispondenti nt', $u'p'$ mediante i rispettivi concorsi y, x, in modo analogo a ciò che dicemmo pel lato medio della sala.

Finora non parlammo che di quelle linee esistenti sul vivo delle pareti; per quelle che si discostano dal suddetto vivo si potrà operare in questa guisa. Prendasi, per esempio, un punto p'' distante da p' otto once, e si segni la $c'p''$ concorrente in l', egli è evidente che tutte le rette che s'intenderanno piantate sulla $c'p''$ suddetta, saranno distanti otto once dalla corrispondente parete. Per determinarne poi anche la posizione, si prolungherà la pm sino a b' in modo che questo punto stia in una retta coi due c', x, e facendo partire le parti della scala da questo punto b' invece di p, riferendole alla $c'p''$ mediante il concorso x, si avranno le posizioni che si desiderano in modo analogo al già dimostrato. Per avere anche le altezze di queste linee, s'innalzerà su p'' la verticale $p''v'$, e su questa si trasporteranno orizzontalmente le parti che abbisognano dalla op'. Il resto è per sè chiaro.

Per quelle linee che sporgono dal vivo della parete media, si prenderanno dalla scala pm, riferendole alla $u'p'$ mediante il concorso x, indi da questa s condurranno delle rette al concorso i',

così, per esempio, la parte *u′ u* che, come vedemmo, corrisponde alla prima parte della scala ora accennata, indica che le rette insistenti sulla *t u* sono distanti un braccio dalla rispettiva parete. La situazione determinata poi, si ricava dalla scala *zp′* mediante il concorso *l′*.

265. *Data la prospettiva di un lato di un frontispizio, trovare quella dell' altro lato* (Fig. LIX).

Sia *A B* il lato di già dato e *Q* il concorso dei lati orizzontali. Per questo punto si segni una linea parallela alla direttrice, e si prolunghi il lato dato *A B* ad incontrarla, sia *S* questo punto d' incontro, replicando l' intervallo *Q S* in *Q R*, sarà *R* il concorso spettante all' altro lato (§ 54). Questi due concorsi serviranno per tutti i frontispizj esistenti su di un medesimo piano.

266. *Come dai concorsi spettanti alle diagonali di un cubo e delle sue facce, si possono trovare le dimensioni prospettiche di un oggetto* (Fig. LX).

Rappresenti la prospettiva un dado innalzato su due scaglioni ineguali e coperto da una tavola. Per non ingombrare il foglio del disegno, si faccia a parte la seguente operazione. Si segni una *D A*, indi una *D′ E* perpendicolare alla prima e lunga, per esempio, un quarto della dimensione del raggio principale. Dal punto *E* si tracceranno le *D E*, *E A* ad angolo retto tra loro, e facenti colla *D A* l' angolo che vorrebbesi che i lati della icnografia del solido facessero colla li-

nea del taglio. Dallo stesso punto E si segni la $E L$ dividente per metà l'angolo retto $D E A$, e terminante nella $D A$, indi si segni la $E F$ eguale ad $L E$ e parallela a $D A$. La $D' E$ si prolungherà sino ad N in modo che $E N$ uguaglj la $L E$ accennata, e la $F E$ si prolungherà fino a G' uguagliando la dimensione $F N$. Su G s'innalzerà la $G' G$ parallela ad $N E$ ed uguale alla stessa, e finalmente si determinerà il punto L', conducendo la $F G$.

Rappresenti $d o'$ l'orizzontale ed e il punto principale. Immaginiamo inoltre un cubo avente le facce parallele a quelle del solido in quistione. Egli è evidente che se replicherassi quattro volte l'intervallo $D D'$ da e a d si avrà in d il concorso spettante alla faccia sinistra del cubo immaginato, non che di quella del solido di cui cercasi la prospettiva. Lo stesso dicasi del concorso della faccia destra, che cadendo fuori della tavola chiameremo o'', e sarà distante da e quattro volte l'intervallo $D' A$. Se su d s'innalzerà la normale $c' d$ quadrupla di $D E$, sarà c' il concorso della diagonale della faccia sinistra del cubo sopra immaginato; lo stesso si farà riguardo al concorso della diagonale della faccia destra del medesimo, il quale insisterà verticalmente su o'' quattro volte la lunghezza $E A$. L'intervallo $L D'$ replicato quattro volte da e ad l, darà in l il concorso di una diagonale delle facce orizzontali del cubo supposto, e su l innalzando $l l'$ quadrupla di $L' E$, determinerassi in l' il concorso di una diagonale dello stesso cubo.

Inteso questo s'incominci dal situare la retta $g'u'$ in quel luogo ove si vorrebbe collocato lo spigolo anteriore del solido, e supposto che il punto u' tocchi il piano geometrico, si segnino, cominciando da u', tante parti uguali sulla retta ora nominata, e queste più o meno grandi, a seconda più o meno grande si vuole che risulti la prospettiva, le quali s'intenderanno rappresentare tante divisioni di un braccio ciascuna segnate sullo spigolo obbiettivo ora accennato, prolungato indefinitamente dalla parte superiore, e sino al piano orizzontale inferiormente.

Ora vogliasi che lo scaglione inferiore sia obbiettivamente alto un braccio e ne sporga tre dalle facce del dado. S'incominci dai primi due punti u, u' a segnare le rette $r u$, $v u'$ tendenti ad l, ed indi dal punto o, che corrisponde a tre parti sopra il punto u, si segni la $o r$ concorrente in l'; dalla intersecazione r di questa colla $r u$ si segni la $r v$ parallela a $g' u'$, e verrà a determinarsi lo spigolo anteriore verticale dello scaglione di cui si tratta; dai punti r, v conducendo poi quattro rette, due tendenti a d e le altre due al concorso o'', saranno con ciò segnate le direzioni prospettiche di quattro spigoli orizzontali, indeterminati dalla parte opposta ad $r v$, ma che determineremo più avanti.

Vogliasi il secondo scaglione alto un braccio e sporgente un braccio. Dal punto n', distante una parte da u, si segnerà la $n' s$, concorrente in l, e dal punto v' distante pure una parte

da n', la $v's$ tendente ad l' e secante la $n's$ in s: da s abbassata la st, e dai punti s, t segnate le quattro rette concorrenti rispettivamente nei punti d, o'', si avranno le direzioni prospettiche degli spigoli orizzontali, come vedemmo del primo scaglione.

Veniamo ora al dado, il quale supporremo alto otto braccia, la faccia sinistra larga dieci, e la destra undici. Si prendano otto parti da n' a b e si segnino le quattro rette $b\,c$, $n'\,n$; $b\,b'$, $n'\,m'$ dirette ai rispettivi concorsi. Si segni pure dal punto g, che è distante dieci parti da n', la gf tendente a d, e da g' che ne comprende undici, la $g'f'$ diretta ad o''. Dal punto n' si ecciti la diagonale $c'\,n'$, la quale segherà la fg in f, e direttamente sotto ad f si segni la $c\,n$, che compie la prospettiva della faccia sinistra del dado. Così la diagonale $n'f'$ che tende al rispettivo concorso e sega la $g'f'$ in f', determinerà la $f'm'$ che compie in $b\,b'\,m'\,n'$ la faccia sinistra dello stesso dado. Con una operazione analoga a quella insegnata pei scaglioni, si troverà lo spigolo $a\,a'$ della tavola, che supponiamo alta un mezzo braccio e sporgente un braccio, ed il zoccolo che serve di finimento, il quale si alza un braccio sopra la tavola medesima.

Rimane ora d' insegnare come si determinino le prospettive degli spigoli orizzontali de' scaglioni e della tavola, da noi lasciati indeterminati. A questo scopo si prepari la seguente operazione. Si prenda un punto q nel mezzo di $b\,n'$ e si segni la $q\,q'$ diretta a d; su questa si segni un punto x esi-

stente in una retta coi due $c\,n'$. Si segnino pure nell' altra faccia le due linee intersecantesi in x', delle quali l'una in linea retta coi due punti b, m', e l'altra coi due n', b'. Evidentemente gli altri due punti x, x' esisteranno obbiettivamente nel mezzo delle corrispondenti facce. Dai punti ora nominati si segnino le rette $x\,y$, $x'\,y'$ tendenti l'una a d e l' altra ad o'', e coi punti q, l si segni un' altra retta segante le due prime in y, y'. Da questi punti si faccian passare le rette $V\,Y$, $V'\,Y'$ parallele alla $g'\,u'$; delle quali linee, se ben si osserva l' andamento di una simile operazione, la $V\,Y$ sarebbe obbiettivamente egualmente distante dagli spigoli $c\,n$, $b\,n'$, e l'altra $V'\,Y'$ sarebbe egualmente distante dagli spigoli $b\,n'$, $b'\,m'$. Inteso questo io mi limiterò a dare il modo di trovare gli spigoli $s'\,t'$, $r'\,p$, giacchè per gli altri serve una operazione identica. Dall' angolo s analogo a quelli che si cercano, si prolunghi la $s\,n'$, che, come vedemmo, concorre in l, a segare le due rette $V\,Y$, $V'\,Y'$, e sieno i, i' questi punti di sezione. Dai punti n, i si produca una linea a segare la $r'\,s$, e da questa sezione r' si segni la $r'\,p$, la quale incontrando la $p\,t$ determinerà lo spigolo del lato sinistro; così dai punti i', m', protratta la $m'\,s'$ ad incontrare la $s\,s'$ e da s' abbassata la $s'\,t'$, sarà con ciò determinato l' altro spigolo. Dai punti r', s' segnando poscia le $r'\,n$, $m'\,s'$ concorrenti, la prima in o'' e la seconda in d, verrassi pure a determinare in tal guisa la prospettiva di una porzione di que' spigoli orizzontali delle facce posteriori, che restano visibili.

Termineremo questa dimostrazione coll' insegnare il modo di tracciare la diagonale $n'f'$, qualora vogliasi evitare il di lei concorso, che riesce per soverchia distanza incomodo. A quest'oggetto prendasi, per esempio, il punto g, da questo si segni la gr coi punti g, l e la gh concorrente in o'', indi coi punti l', n' si segni la lineetta che sega la gr in r, dai due punti d, r si protragga la rh, ed avendo col punto di sezione di questa colla gh e col punto n' segnata $n'f'$, questa sarà la diagonale dimandata.

266. *Del modo di segnare la prospettiva degli archi* (Fig. LXI).

Rappresentino le rr', ss' gli spigoli di due pilastri corrispondenti al vano dell'arco, v il concorso del diametro prospettico rs; vq l'orizzontale, e debba l'immagine dell'arco corrispondere ad un vano, per esempio, di due quadri. Si segni la yn passante per s e parallela a vq, su di essa si prenda un punto e distante da s due terzi della dimensione ss', e sul diametro es si costruisca l'arco $edcs$. Da alcuni punti d, c di quest'arco, si abbassino sulla es le ordinate df, ci, indi prolungando dai punti e, r una retta sino alla orizzontale, sia q ove queste s'incontrano. Dai punti d, c; f, i si segnino le dg, cb; fh, il dirette a q, e dai punti h, l innalzando le gh, bl parallele alle df, ci, avransi nell' incontro delle prime colle corrispondenti dg, cb i due punti g, b che uniti agli altri r, s servono ad indicare l'andamento dell'arco prospettico $rgbs$.

Volendo poi la larghezza del piedritto un quarto della larghezza del vano, ed altri due archi di seguito, si prenderà sulla $y\,n$ un intervallo $s\,n$ uguale ad un quarto di $e\,s$, e si replicheranno ordinatamente gli intervalli ns, $s\,e$ in em, $m\,z$, $z\,o$, $o\,x$, xy. Dai punti m, z, o, x, y condotte delle rette concorrenti in q ad incontrare il diametro $r\,s$ prolungato, si avranno in questi punti d'incontro le prospettive dell'origine degli altri archi, de' quali potrassi compierne le intiere, in modo identico al già dimostrato.

267. Porremo qui fine alla esposizione delle regole abbreviatrici, delle quali tra le molte, quelle io scelsi che credei più idonee a facilitare le operazioni prospettiche, e che potranno servire di guida onde ritrovarne delle altre a norma del bisogno; termineremo adunque questo nostro lavoro inculcando agli artisti, sull'esempio dei più abili che scrissero pel vantaggio delle belle arti del disegno, la necessità di un accurato studio ed uso delle regole della prospettiva, giacchè è assolutamente impossibile che il solo esercizio, quantunque assai prolungato ed appoggiato a ritrarre dal rilievo, sia sufficiente a rendere la mano così abile e l'occhio così esatto, di rappresentare gli oggetti alquanto complicati, senza che vi s'introducano delle sconciature.

Non intendo però con questo di consigliare all'artista, che ogni linea delle prospettive debba essere determinata colle regole alla mano, ma intendo bensì che le linee principali del disegno,

quelle cioè che formano la così detta ossatura, abbiano ad essere rigorosamente trovate dietro esatti principj. E qui osserverò, che la comune degli artisti operando inversamente, cioè facendo prima la detta ossatura ad occhio, ed indi collocandovi i dettagli col sussidio di regole analoghe a quelle da noi in questa sezione esposte, ne nasce, che mentre le parziali parti dell'oggetto imitato, a sufficienza soddisfano l'occhio, l'insieme poi, cioè la parte essenziale dell'illusione, presenta delle deformità, che i meno esperti credono sovente difetto inerente all'arte, e non procedente dall'imperizia o trascuraggine dell'esecutore.

Non obblierò per ultimo di accennare, che in tale difetto cadono principalmente que' figuristi che usano di fare le loro composizioni, cominciando dal collocamento arbitrario delle figure e passando poscia alle architetture nelle quali vanno poste, poichè queste non potendo fare a meno di essere legate ai loro punti di concorso, e non adattandosi facilmente a certi arbitrj, rare volte si possono combinare senza stento, e quasi sempre presentano delle notabili discordanze colle altre. E qui cade in acconcio il far riflettere, che fatta una prospettiva, ben difficile, e qualche volta impossibile, riesce il determinare un errore nel quale possa essere incorso l'operatore, quando questo non sia de' madornali, anzi dirò, replicando ciò che altra fiata dissi, che alle volte la cattiva scelta del punto di

vista o la cattiva collocazione della parete, fanno sembrare erronee certe prospettive fatte anche coi più accurati metodi: si noti però, che quantunque non si possa indicare nel primo caso ove l' artista si discosti senza ragione dalle regole, non potrassi però evitare che ne nasca negli spettatori più avveduti un effetto dispiacevole, e che lascia qualche cosa a desiderare nell' opera.

Verò è che parlandosi di linee irregolari, sempre più difficile in queste riesce lo scoprirvi de' difetti; non si lusinghino però gli artisti di esser per ciò sciolti in questi casi da ogni vincolo, imperocchè, se le sconciature riescono più visibili in quegli oggetti ove la nota regolarità e proporzione, serve di confronto sul modo col quale ci vengono presentati nella loro imitazione, ragion vuole che anche le linee irregolari che tengono occultato qualche difetto, non potranno far sì che non ne traspaja la cattiva influenza di esso, ed è ben da supporre, che non potrassi mai ottenere da tali opere, tutta quella illusione che l' arte è capace di produrre in quelle accuratamente eseguite.

COMPIMENTO DELLA PROSPETTIVA

Quantunque assai di rado occorra di descrivere delle prospettive sovra piani inclinati e sovra superficie curve, specialmente al presente, ove è di costume il dipingere le volte non in altra guisa che con compartimenti di poco sfondo, o cassettoni variamente combinati, non sarà però

inutile il sapere come si opera anche in questi casi, acciò il prospettico che conosce l'arte sua, non abbia ad essere imbarazzato qualora simili lavori gli venissero affidati, od almeno non abbia a ricorrere a metodi lunghi e tediosi. Tale riflessione fu quella che determinommi a dar compimento a questo trattato di prospettiva, coll'insegnare come debbasi operare nei casi sopra menzionati, e ciò appoggiandosi sempre al sistema già esposto, colla lusinga che questo possa apportare delle facilitazioni, non combinabili agevolmente con qualsiasi altro metodo. Avvertirò per altro, che quivi io non intendo di dare un corso completo di un tal genere di prospettiva, nè un corredo di figure atto a svilupparne i minimi dettagli, non tanto perchè di troppo non s'allunghi quest'opera, ma perchè sembranmi inutili per quelli che hanno ben ponderato ciò che viene esposto nel rimanente di essa. Cominceremo il nostro divisamento, col porre sott'occhio le variazioni che accadono in alcuni degli elementi delle operazioni prospettiche già da noi definiti nella Sez. I, e quali altri ne abbisognino per la più spedita via dell'operare, nel sistema di prospettiva di cui si tratta.

Circa alle variazioni ora accennate, egli è evidente, che la parete non essendo nel sistema in discorso perpendicolare al piano ortografico, la fondamentale e la linea del taglio non rappresentano più la projezione della prima sul secondo, ma soltanto vengono ad indicare la sezione di

questi due elementi tra loro. Da questo discende poi, che i punti prospettici di concorso e d'incontro, non possono più avere le loro projezioni nelle linee testè dette, ma vengono ad essere variamente situate sul piano geometrico, ed il raggio principale non sarà perpendicolare alla parete. La linea di distanza parimenti, e le rette di concorso, avranno ancora una estremità nel punto di stazione, ma l'altra estremità sarà, per la linea di distanza e per le rette di concorso di obbiettive orizzontali, nella projezione della orizzontale sul piano geometrico, e per le rette di concorso spettanti ad obbiettive inclinate, la estremità che dicemmo, sarà al di là della linea del taglio, oppure tra questa ed il punto di stazione, a seconda che la parete sottenderà un angolo ottuso od acuto col piano geometrico, dalla parte che corrisponde al punto di stazione suddetto.

Riguardo ai nuovi elementi che abbisognano ad un tale metodo di prospettiva, accenneremo i seguenti, cioè: 1.° Un piano perpendicolare a quello geometrico ed alla parete, che chiameremo *piano del profilo*. 2.° Le sezioni di questo piano con quello geometrico e la parete, la prima delle quali distingueremo col nome di *fondamentale del profilo*, e la seconda con quello di *secante*. Egli è poi chiaro che l'inclinazione di queste due linee tra loro, debbe indicare quella esistente tra i due piani in discorso. 3.° Le *projezioni del raggio principale*, di *quelli di concorso*, della *linea di stazione*, ed anche *dei raggi visuali* sul piano del

profilo, i quali nella loro intersecazione colla linea secante, contengono le *projezioni dei punti prospettici di concorso* e *d'incontro* sul medesimo piano. 4° E finalmente la projezione della orizzontale sul piano icnografico, che chiameremo *orizzontale icnografica*.

Inteso ciò che si disse riguardo agli elementi necessarj al sistema di prospettiva che andiamo ad accennare, dimostreremo il modo di trovare l'immagine di un parallelepipedo appoggiato al piano geometrico con una faccia, su di una parete piana inclinata, il quale servirà di norma, tanto per iscorgere le variazioni che accadono nelle operazioni grafiche, paragonate con quelle della Sez. I, quanto per far conoscere la via che debbe tenersi, per qualunque altra operazione prospettica di simil genere.

Prima di tutto avvertiremo, che i piani elementari s'intendono conformati in un sol piano, per la comodità dell'operazione, siccome dicemmo nel § 105. Sia adunque $A\,B\,C\,D$ (Fig. LXII) l'icnografia del parallelepido sopradetto, $D''B''B'D'$ l'ortografia fatta su di un piano perpendicolare alla $q\,Z$ che è la linea del taglio; siano in una retta con questa, la fondamentale ortografica $Q\,q$ e quella del profilo $F\,Q$. Rappresenti inoltre E il punto di stazione, $q\,E$ la retta di distanza prolungata fino alla $q\,Z$, $G\,Q$ la secante, $y\,z$ la fondamentale prospettica e $g\,g'$ la direttrice. Prendasi l'intervallo $q\,E$ e si trasporti in $F\,Q$, e su F s'innalzi la $G\,F$ perpendicolare alla $F\,Q$; su questa $G\,F$ si prenda

un punto E' distante da F quanto è lunga la linea di stazione, e da questo si segni la $E'e$ parallela alla FQ; sarà $E'F$ la projezione sul piano del profilo della linea di stazione suddetta, ed $E'e$ quella del raggio principale. Prendasi inoltre l'intervallo eQ e si trasporti sulla gg' in $e'g'$, e per e' si faccia passare la mv parallela alla yz; sarà e' il punto principale ed mv l' orizzontale prospettica; così prendendo $E''E$ eguale ad $E'e$, e per E'' facendo passare la MV parallela alla qZ, avrassi in MV l' orizzontale icnografica ed in $E''E$ sarà determinata la linea di distanza. Segninsi per E le due EM, EN rispettivamente parallele alle AD, CD, e saranno queste le rette di concorso spettanti agli spigoli orizzontali del solido, per cui $E''M$ trasportato in $e'm$, ed $E''N$ in $e'n$, daranno in m ed n i corrispondenti concorsi. Si noti che la $E'G$ si è la projezione sul piano del profilo del raggio di concorso spettante agli spigoli verticali del solido suddetto, per cui trasportando eG in ge', avrassi in g il concorso relativo. Riguardo al concorso di rette inclinate col piano geometrico, osserveremo, che segnate, a cagion di esempio, le diagonali ortografiche $D'A'$, $A''D'$, e tracciate per E', la $E'H$ parallela alla $A''D'$ e la $E'L$ parallela alla $D''A'$, saranno le suddette $E'H$, $E'L$ le projezioni sul piano del profilo dei corrispondenti raggi di concorso, e quindi H, L quelle degli analoghi punti di concorso. Ora osservisi che i punti m, g sono quelli di concorso di rette esistenti nel piano su cui giacciono le diagonali di cui si di-

scorre, e però sarà la indefinita mg la relativa linea di concorso, per cui se prenderassi su questa un punto h, distante dalla mv quanto l'intervallo eH, sarà h il concorso della diagonale $A''D'$. Lo stesso dicasi dell' altro punto L, onde avere il concorso della $D''A'$, che cade fuori della tavola.

Riguardo ai punti ed alle linee d' incontro, si prolunghino le AD, CD, AB sino alla qZ, ed i punti U, T, Z trasportati in u, t, z, daranno in quest' ultimi quelli d' incontro delle corrispondenti rette esistenti sul piano geometrico. Se prolungherassi la CT sino ad incontrare la orizzontale icnografica in V, e questo punto si trasporterà in v su quella prospettica, avrassi nella indefinita vt la linea d'incontro del piano la cui icnografia è CT, per cui se prolungherassi la $D''B''$ sino alla secante in X, e se prenderassi un punto x' sulla vt suddetta distante dalla yz quanto l'intervallo XQ, sarà x' il punto d'incontro dello spigolo la di cui ortografia è $C''D''$; tracciando quindi per u una xu parallela a vt ed eguale ad xt, avrassi in x il punto d' incontro dello spigolo avente per ortografia $A''B''$.

Per la prospettiva del solido si tracceranno le linee visuali AE, BE, CE, DE, i punti O, P, R, S si trasporteranno in o, p, r, s, e per questi tracciate delle altre rette concorrenti in g, avransi in esse le direzioni prospettiche degli spigoli verticali. Con z ed m si determinerà lo spigolo ad, con x, n ed x', n quelli $c'd'$, $a'b'$, nelle

intersecazioni de' quali colle linee che concorrono in g, si avranno gli altri spigoli $b' c'$; $a' d'$, concorrenti in m, restando con ciò compita la prospettiva richiesta, nella quale voglionsi avvertire le prospettive $a' d$, $a d'$ delle diagonali di cui parlammo più addietro, aventi, la prima per concorso il punto h, e l'altra l'analogo fuori della tavola, come di già osservammo.

Riguardo alle prospettive espresse su pareti curve è da riflettersi, che queste non potranno mai esser descritte con sufficiente chiarezza in un libro, perchè la forma piana di questo non s'accorda con quella delle volte, specialmente se desse sono semisferiche o semiellittiche; diremo però che il principio da noi esposto può servire di guida anche sul modo di operare in simili casi, e che quelli i quali fondatamente conoscono la teorica dell'arte, facilmente troveranno le regole acconce a qualunque forma di parete. Avvertiremo soltanto, che le prospettive delle rette, risultando nel caso di pareti curve, circolari od ellittiche, i punti e le linee di concorso possono riescire di poco o niun vantaggio alle regole, e che però il metodo più spedito di operare, sarà quello di tracciare, dopo aver data alla secante quella curva che richiedesi dal caso, tra le orizzontali e le fondamentali prospettiche ed icnografiche, altre linee parallele alle medesime, che potremo chiamare *sussidiarie*, e queste con un metodo identico a quello accennato per le $m v$, $M V$, le quali serviranno, trasportando le sezioni delle linee visuali colle

sussidiarie icnografiche sulle corrispondenti della parete, a trovare tanti punti quanti ne abbisognano, per tracciare le direzioni prospettiche delle analoghe obbiettive.

Per determinare poi gli estremi di queste prospettive, debbe distinguersi se le volte sono di forma cilindrica o di forma sferica; nel primo caso è necessario che la secante abbia il punto *Q* ove ella si unisce alla fondamentale del profilo *F Q*, distante dai punti ortografici *D'*, *A'*, *C'*, *B'* quanto i corrispondenti della icnografia lo sono dalla linea del taglio *q Z*, e tracciando quindi sul piano del profilo le projezioni dei raggi visuali *E' B''*, *E' C''* ecc. trasportare le intersecazioni di questi colla secante, sulla direzione prospettica che gli corrisponde. Nel secondo caso la linea del taglio, la orizzontale e le sussidiarie della icnografia, prenderanno una forma curva pur esse, e siccome il punto di vista viene in tali circostanze sempre collocato nel prolungamento dell' asse della volta, così, supponendo quest'asse projettato in *G F*, ciascun punto dell'ortografia si dovrà collocare distante dalla *G F* ora detta, quanto l'analogo punto icnografico lo è dal punto di stazione, e quindi tracciare le projezioni dei raggi visuali sul piano del profilo, ed operare come di già si disse.

APPENDICE I.

NUOVI STRUMENTI AD USO DE' DISEGNATORI

Gli strumenti che servono a facilitare un' operazione qualunque ed a renderla più esatta, sono sempre utili al ramo cui essi tendono e di profitto all'operatore. Tali essendo quelli di cui mi accingo a dare la descrizione, credo utile l'unirla a quest'opera, perchè oltre alla relazione che hanno colla stessa, conservano le qualità sopra notate, e l'estrema loro semplicità, e la tenue spesa che per conseguenza ne porta la costruzione, potranno far sì che l'uso ne divenga generale quanto quello della parallela, della squadra e del compasso.

Gli strumenti in discorso sono quattro, e questi vengono distinti coi nomi di *Triregolo*, di *Compasso d' archi*, di *Rastrematojo* e di *Compasso d'ovale.*

Triregolo.

Nel decorso della prospettiva, abbiam di già fatto menzione dell' imbarazzo che cagionano all'operatore i punti di concorso, quando cadono ad una rilevante distanza dal foglio su cui si eseguisce il disegno. In questa circostanza sogliono i disegnatori di prospettive ricorrere all' uso incomodo di ampie tavole e di righe o fila lunghissime, e se per avventura i detti punti poi cadono

fuori del locale in cui si opera, è forza di abbandonarne l'uso, e d'impiegare per ottenere le linee prospettiche, delle operazioni lunghe e seccanti, a meno che non si voglia accontentarsi di una approssimazione, sempre però di danno al buon effetto dell' opera. Lo strumento di cui sono per dare la descrizione, ha per principale scopo di liberare i disegnatori di prospettive dagli imbarazzi su accennati.

Uno strumento denominato *Parallelo scenografico* fu da me ideato sino dal 1810, diretto a togliere anch' esso le difficoltà sopra notate. Questo fu premiato con medaglia d' argento dall' I. R. Istituto di Lettere, Scienze ed Arti, e trovasi descritto in altra mia opera intitolata, *Geometria descrittiva ad uso degli Artisti* (*). Ma un tale strumento quantunque di un uso più comodo e sicuro dei metodi su indicati, ha però l' inconveniente di una costruzione più complicata e dispendiosa che quella del triregolo, ed è più di questo incomodo nella sua applicazione alla pratica. Dal detto scorgesi che il secondo strumento debba dagli artisti preferirsi al primo, e molto più se considerasi, che questo può estendersi ad altri usi comunissimi ai disegnatori ed estranei al parallelo su mentovato, come potrà vedersi nel progresso della dimostrazione.

Il triregolo si compone di tre regoli di legno *A B*, *E F*, *C D* (Fig. LXIII), due de' quali,

---

(*) Il triregolo fu pure premiato con medaglia d'argento nel 1822.

cioè gli *A B*, *E F*, sono collegati insieme con cerniera in ottone come un compasso di proporzione, ed il terzo regolo *C D* è soprapposto ed unito ai due primi con un suo estremo guarnito pure di ottone, in modo di poter girare sull' asse di rotazione della cerniera. La Fig. *M F B* fa vedere in iscala più grande la maniera colla quale debbono essere uniti i tre regoli. La vite *H* avente la sua madre nel regolo *A B*, ha per iscopo di fissare a norma del bisogno quest' ultimo regolo col superiore testè menzionato. Finalmente il galletto *M*, in cui entra l' estremo costituito a vite del comun asse di rotazione, serve ad impedire ogni movimento ne' tre regoli, quando sieno stati disposti sotto quegli angoli richiesti dall' operazione. Quest' asse di rotazione sarà perforato nel centro, onde potere introdurvi uno spillo *V V*, che io nominerò *centrale*. Le punteggiate della figura stessa, avvertono che i due lembi interni dei due regoli inferiori, ed uno di quelli del regolo superiore, debbono tutti e tre concorrere nel centro dell' asse di rotazione. La figura *x y z* rappresenta una sezione trasversale dei tre regoli, quando l' istrumento sia chiuso. Sarà facile il concepire che la parte inclinata del regolo *x*, è necessaria per approssimare il più che sia possibile alla carta il lembo che serve per tracciare le linee, onde togliere ogni inesattezza dipendente dal movimento della mano.

Maniera di adoperare il triregolo.

Immaginiamo che fra due linee *e g*, *f h* (Figura LXIV) inclinate, sia necessario di segnare una serie qualunque di rette, tutte tendenti al punto in cui prolungate s' intersecherebbero le due linee sopra indicate. Si tracci una *e f* come più piace; ed avendo introdotto lo spillo centrale nel foro apposito, si infigga nel punto *f*, e si adatti il lembo del regolo *A B* (parlando di lembi s' intenderanno sempre quelli che concorrono nell' asse della cerniera) alla *e f*, e quello di *C D* alla *f h*, quindi stringendo la vite *H* si fissino i due anzidetti regoli nella precisa apertura che avranno acquistata. Infiggendo quindi lo spillo centrale al punto *e*, si faccia combaciare il lembo di *C D* alla *e g*, e quello di *E F* alla *e f*, e di poi si stringa il galletto *M* in maniera che rimanga impedito ai tre regoli ogni movimento di rotazione sull' asse della cerniera: oppure in un modo forsi più spedito, si segni col centro in *f* l' arco *a b*, un arco eguale si faccia in *c d* col centro in *e*, e quindi si prolunghi per *e* e *c* una retta indefinita *e y*. Avendo in questa guisa trasportato l' angolo *e f h* in *y e g*, si infigga lo spillo centrale al punto *e*, i lembi dei due regoli laterali si adattino alle *e f*, *e y*, e quello del regolo medio alla *e g*, indi si fermino tutti e tre insieme stringendo la vite *M*. Disposto lo strumento in questa guisa, si levi lo spillo centrale, si infigga uno spillo in *e* ed un altro in *f*, ed a ciascuno dei medesimi

si ponga aderente il lembo di ciascuna delle due righe esterne AB, EF, ed in modo che il regolo CD stia tra le rette eg, fh; se dopo ciò si moverà lo strumento sempre mantenendo i regoli a contatto degli spilli, il lembo del regolo intermedio CD, sarà costantemente diretto al punto di concorso delle eg, fh, e quindi avrassi il mezzo di segnare tutte quelle linee richieste concorrenti al punto suddetto.

La proprietà dello strumento verrà a farsi chiara, riflettendo che se in un circolo $ilmno$ (Fig. LXV) si tracci una qualunque corda in, quindi da un punto o preso ovunque nel segamento ion si guidino quante rette si vogliono ol, om, ecc. e finalmente dai loro estremi l, m si conducano le li, ln; mi, mn ecc. risulterà l'angolo ilo uguale ad imo, uguale ecc. e l'angolo nlo uguale ad nmo, uguale ecc.

La ragione poi per cui disposti i tre regoli sotto gli angoli dati di due rette inclinate e da una qualunque altra che la seghi, come nella Figura LXIV, venga il lembo del regolo di mezzo sempre ad esser diretto al punto di concorso delle due inclinate, sta in ciò, che se nella Fig. LXV si tirino oltre le già menzionate rette, pure le oi, on, avrassi l'angolo oin uguale ad oln uguale ad omn uguale ecc. e l'altro ino uguale ad ilo, uguale ad imo uguale ecc.

Occorre spesso nelle prospettive di avere più punti lontani dal disegno, che servono di concorso tanto a prospettive di linee parallele al pia-

no geometrico, quanto ad altre inclinate allo stesso; in questo caso volendo per ciascuno di questi punti far uso del triregolo, appoggiandosi unicamente alla dimostrazione su indicata, bisognerebbe moltiplicare gli spilli a seconda della quantità dei punti che abbisognano; ciò che porterebbe imbarazzo nel disegnatore e confusione nell'operare; egli è perciò necessario l'insegnare il modo di determinare gli angoli del triregolo, capaci di dare le linee concorrenti in qualsiasi punto di concorso, data che sia la posizione degli spilli.

A questo scopo immaginiamo che l'obbiettivo rappresenti un edifizio quadrangolare, avente su di una faccia elevato un frontispizio. Sia questo veduto fuori dell'angolo retto e resti il frontispizio alla destra del riguardante. Si segni in un foglio separato dal disegno una retta FD (Fig. LXVI), su di essa si prenda un punto E, e quindi altri due punti F, D, distanti da E, a cagion d'esempio, l'ottava parte dei due concorsi orizzontali dell'obbiettivo suddetto dal punto principale, come pure tracciata la normale CC' passante per D, si segnino su di questa i due punti C, C', distanti da D l'ottava parte della distanza fra i concorsi dei lati inclinati del frontispizio e quello del lato orizzontale.

Sieno dati di posizione i due spilli, e per la maggior facilità della dimostrazione esistino questi su di una retta parallela alla direttrice. Sia AB una perpendicolare alla FD, e distante da E l'ottava parte della distanza fra la retta parallela sopra

nominata ed il punto principale, e sia finalmente *A* lontano dalla *F D*, l'ottava parte dell'intervallo tra lo spillo superiore e l'orizzontale, e *B* distante dalla stessa *F D*, l'ottava parte della distanza tra lo spillo inferiore e l'orizzontale ora detta. Dalla presente operazione è facile l'immaginarsi, altro non essere la figura ora tracciata, che quella necessaria per la costruzione della prospettiva, ridotta otto volte minore, e ciò per ottenere una dimensione comoda per l'operatore.

Ciò premesso, dai punti rappresentanti i concorsi a quelli indicanti gli spilli, si traccino le rette *F A*, *F B*; *A C*, *B C*; *A D*, *B D*; *A C'*, *B C'*, e si segnino i due cerchj uguali aventi i centri in *A*, *B*. Prendasi sull'inferiore la parte *R S*, si trasporti sul superiore in *R' Q* e si tracci la *A Q* indefinita dalla parte di *Q*; l'arco *T S* si trasporta in *T' O* e si segna la indefinita *A O*; l'arco *V S* trasportato in *V' P* darà la direzione della *A P*, e l'arco *Y S* trasportato in *Y' H* darà la direzione della *A H*. Ciò posto, infisso lo spillo centrale nel punto *A* e disposti i lembi del triregolo cogli angoli *O A D*, *D A B*, nel modo che vedemmo nella Fig. LXIV, si avranno dal lembo medio le rette tendenti al concorso destro dei lati orizzontali: gli angoli *H A F*, *F A B* daranno le disposizioni dei lembi, necessarie per le linee tendenti all'altro concorso sulla orizzontale. Gli angoli *Q A C''*, *C'' A B* spetteranno al concorso inferiore all'orizzontale, e gli angoli *P A C*, *C A B* al concorso superiore alla stessa orizzontale.

Gioverà far quivi la seguente osservazione. Quantunque nella situazione degli spilli ora accennata, si possano ottenere delle linee tendenti a ciascuno dei quattro punti di concorso, come si disse, può darsi per altro il caso, che in alcuna di queste posizioni, il regolo di mezzo non arrivi a passare pel luogo ove dovrebbero esistere le linee prospettiche. Così a cagion di esempio, la riga corrispondente alla AC' non potendo oltrepassare la posizione indicata da una tal retta, non potrebbe per conseguenza porgere il mezzo di segnare le linee prospettiche, quando queste oltrepassassero un tal limite. In tal caso egli è dunque necessario di cambiare la posizione ad uno dei due spilli, per situarlo nel luogo conveniente allo scopo di cui si tratta. Supponiamo adunque data quest'ultima posizione, e che dessa corrisponda al punto G, tracciato colle precauzioni che accennammo per gli altri A, B. Segnate le BG, GC', si faccia col centro in G l'arco $R''U''$ uguale all'arco RU, e tracciata la indefinita GU'', gli angoli $U''GC'$, $C'GB$, indicheranno quelli sotto cui debbe porsi il triregolo nella posizione G, B degli spilli.

Avvertirò pure, che volendo far servire un solo triregolo per tutti questi punti di concorso, egli è d'uopo, come è evidente, scomporre gli angoli spettanti ad uno di essi, per ottenere quelli spettanti ad un altro: in questo caso lo strumento si presterà speditamente, se si avrà la precauzione di segnare collo spillo centrale un punto in cia-

scuna delle posizioni accennate, dei quali quelli che spettano ai concorsi esistenti sulla orizzontale, sarà sempre bene segnarli sulla orizzontale stessa, e quelli inferiori o superiori a questa linea, si potranno marcare in quel luogo che torni più comodo, segnando per altro con una lineetta anche il luogo di passaggio del lembo medio, onde avere tutti i dati necessarj per rimettere i lembi sotto quegli angoli dati dalla prima posizione.

Benchè l' operazione ora accennata sia per sè stessa esatta, non è però da tacersi, che la moltiplicità delle linee produce sovente confusione, e non dà quel risultamento che l' esattezza stessa richiede; non sarà inutile perciò l' accennare un modo pratico per sottoporre il triregolo a quegli angoli che la situazione dei punti di concorso e degli spilli richiede, nel quale, sebbene questi angoli si rinvengano a tentone, in ultima analisi esso è meno imbarazzante, più spedito e sicuro degli accennati. Il modo pratico in discorso è il seguente. Si determini una linea col metodo del § 249 della prospettiva, se il concorso esiste sulla orizzontale, oppure due nel caso diverso, col metodo insegnato nel § 250. Avendo in questo modo determinate due linee, nel prolungamento delle quali esiste il punto per cui passar debbono le linee prospettiche, sieno desse rappresentate dalle $e\,g$, $f\,h$ (Fig. LXIV). Si infiggano i due spilli nei luoghi più convenienti, e siano questi in x, y. Si mettano ora i lembi laterali sotto quell' angolo che un di presso si crede il più vicino a quello che richie-

desi dal caso, e ponendoli a contatto dei relativi spilli, si adatti il lembo medio alla linea *f h*, ed in questa posizione alzando lo strumento, sempre tenendo i lembi laterali aderenti agli spilli, si vegga se il lembo medio combina coll' altra linea *e g*; se questo passando pel punto *e* si trova inoltre inferiore al punto *g*, è segno che l'angolo dei lembi laterali va più ottuso, e viceversa andrà più acuto se passerà per *e* e superiormente a *g*, onde egli è evidente, che con queste nozioni si potrà rettificare l' angolo nominato sino che nel movimento ora detto, il lembo medio si trovi nelle perfette direzioni *e g*, *f h*, ed allora si fermano le righe stabilmente insieme per operare.

Diremo per ultimo, che qualora alcuni punti di concorso e gli spilli accennati esistino su cerchj di una dimensione non molto distante tra loro, come accade facilmente nei concorsi dei tre lati di un frontispizio, si può in questo caso cambiare la posizione di uno dei due spilli, e, senza che questi cadano molto lontani dal disegno, mantenere gli angoli costanti nel triregolo, ed ottenere le linee prospettiche spettanti ai tre concorsi; la qual cosa essendo molto comoda, sarà giovevole il conoscere come ciò si ottiene. S' incomincerà primieramente dal fissare la posizione di uno spillo nel luogo che torna più utile, ed appoggiando a questo il lembo corrispondente, si adatterà il lembo medio ad una delle due linee date, come sopra dicemmo, e si traccerà una retta nella direzione del lembo laterale, opposto a quello

già nominato. Ciò eseguito si riterrà ancora il primo lembo a contatto del relativo spillo, ed adattando il lembo medio all'altra linea data, si segnerà ancora una retta nella direzione dell'altro lembo laterale, la quale determinerà nella sezione coll' analoga linea già tracciata, il punto dove debbe essere infisso il secondo spillo.

Termineremo la descrizione di un tale strumento, coll'accennare alcuni, tra gli altri varj usi cui egli potrebbe essere utilmente impiegato. E primieramente disponendo le due righe laterali in linea retta, adattando i lembi delle medesime a due spilli, e mettendo il regolo di mezzo in una inclinazione qualunque colla direzione dei lembi degli anzidetti regoli divenuta unica, si avrà un mezzo assai più comodo e sicuro, per segnare una serie qualunque di linee parallele, che quello presentato dai paralleli e dalle squadre ordinarie, usate comunemente dai disegnatori.

Inoltre, se nel foro spettante allo spillo centrale vi si introdurrà una punta segnante, il triregolo potrà servire di compasso d'archi, come si scorgerà dalla descrizione di questo; nella quale circostanza egli è d'avvertirsi, che ritenuti i lembi dei regoli laterali disposti stabilmente sotto di un dato angolo onde segnare un arco proposto, se si varierà la inclinazione del regolo di mezzo, ed in ciascuna inclinazione si segneranno due linee le quali si intersechino in un dato luogo, tutte queste intersecazioni, costituiranno altrettanti punti esistenti sul circolo di cui l' arco descritto dalla punta segnante è parte.

Finalmente accenneremo, come mediante una piccola aggiunta, possa venire il triregolo adoperato per descrivere le prospettive degli archi architettonici circolari, supposti in direzione facente angolo colla parete, le quali prospettive, come vedemmo nella Sez. I della Prospettiva, sono semiellissi, aventi un diametro nella prospettiva dei diametri orizzontali degli archi medesimi. Sia *rs* (Fig. LXVII) il diametro prospettico ora accennato. Sopra il suo punto di mezzo *f* s'innalzi la normale *fa*, e determinato colle regole della prospettiva il punto *a*, sarà *fa* un semidiametro conjugato di *rs*. Da *a* si abbassi *ad* perpendicolare ad *rs*, e preso l'intervallo *ab* uguale alla metà *fs* del diametro *rs*, si faccia passare per *f* e *b* una retta *fg*. Preparate le cose in questa guisa, si adattino i lembi delle righe del triregolo alle linee *rs*, *fg* nel modo indicato nella figura a destra, nella quale le lettere majuscole di indicazione, corrispondono alle minuscole della figura a sinistra. Presa quindi una quarta riga la quale abbia nella estremità *A* una punta segnante, e sia munita di due fasce scorrevoli di ottone *B*, *D*, aventi di sotto ciascuna una punta sporgente, si dispongano le tre punte testè menzionate, cioè la segnante *A* e le due raccomandate inferiormente alle fasce, in modo che *AB* sia eguale ad *ab* e *BD* eguale a *bd*. Finalmente se dopo ciò si soprapporrà il regolo *AD* al triregolo, in modo che la punta della fascia *D* tocchi il lembo *RD*, e l'altra della fascia *B* il lembo *FB*, e si farà scorrere

la prima punta lungo il lembo cui fu posta aderente, mantenendo la seconda sempre a contatto dell'altro lembo che gli spetta, la punta segnante *A* descriverà la prospettiva ricercata, cioè la curva ellittica *R A D*.

Compasso d' archi (*).

Questo strumento porge il mezzo di descrivere qualunque arco circolare senza ricorrere al di lui centro, e col solo sussidio di tre punti pe' quali debba passare l'arco medesimo. Esso si compone di due pezzi d'ottone *A C f f*, *A' C' f' f'* (Figura LXVIII) uniti a cerniera in *A A'*; di due righe di legno *D D*, *D' D'* lunghe ciascuna non meno della corda del massimo arco che si vuol descrivere, e collegate ai pezzi di ottone colle viti *f*, *f*, *f'*, *f'*, per modo che i due lembi *D D*, *D' D'*, concorrino nell' asse di rotazione della cerniera; di un portalapis *E B*, la di cui parte superiore viene attaccata nel centro della cerniera suddetta mediante il galletto *B*, e quindi può levarsi per sostituirvi quando occorra il tiralinee; e finalmente dalla vite *L*, la quale ingrana in una specie di vite perpetua *a a*, praticata nella testa del pezzo *A C*, e serve a partecipare la rotazione ai due pezzi *A C*, *A' C'* con un moto lento ed uniforme, non che ad assicurarne la posizione quando si opera. Dal detto apparisce, che in ultima analisi

(*) Premiato con menzione onorevole nel 1818.

il compasso d'archi consiste in due regoli $D D$, $D' D'$, che si possono disporre sotto un angolo qualunque, ed in una punta segnante E, trovantesi costantemente nel punto in cui si tagliano i prolungamenti dei lembi de' regoli suddetti.

Uso del compasso d' archi.

Siano x, y, z, i tre punti pei quali debba passare l'arco circolare che si vuol descrivere senza appoggiarsi al di lui centro. Si infiggano due sottili spilli ne' due punti x, z, si ponga a contatto di ciascuno di questi due spilli uno dei lembi de' regoli dell' istrumento, e si allarghi o si ristringa l'angolo formato dai lembi medesimi, fino a che la punta E del lapis cada precisamente sul punto y. Disposte le cose in questo modo, si faccia scorrere l'istrumento mantenendolo aderente agli spilli, e la punta E segnerà l' arco circolare richiesto.

La teoria di questo strumento sta nella nota proprietà del circolo, che *gli angoli insistenti al medesimo arco e disposti nello stesso segamento, sono tra di loro uguali.*

Fra i molti usi cui può servire il compasso d' archi, parleremo solamente, per amore di brevità, di una sua applicazione alla rastremazione con curva continuata delle colonne d'ordini gravi e pesanti, come quelli di Pesto, in cui la differenza fra il diametro superiore e l' inferiore vuol essere alquanto risentita.

Sieno $c\,c'$, $a\,a'$ le linee rappresentanti i diametri inferiore e superiore che debbe avere la colonna da rastremarsi, ed $e\,f$ l'asse della colonna stessa. Da a si abbassi la $a\,b$ parallela all'asse, si faccia $o\,b$ uguale ad $o\,a$, e quindi col mezzo di tre punti a, c, b e dell'istrumento, si descriva l'arco $c\,a$, il quale sarà un lato della colonna. L'altro $c'\,a'$ si otterrà in maniera perfettamente simile alla esposta.

Se le colonne dovranno essere cannellate, si potrà procedere nel modo seguente: col centro a e raggio $c\,o$ descritto l'archetto $g\,h'$, si conduca $c\,d$ tangente all'arco medesimo, presa poi $a\,d$ uguale ad $a\,c$, coi tre punti d, a, c si descriva un archetto il quale seghi l'asse della colonna in e, e finalmente si faccia mf uguale ad me. Supponiamo ora non descritte le curve $a\,c$, $a'\,c'$, e che i punti c, l, h ecc. sieno i punti da cui debbono partire le linee rappresentanti gli spigoli delle cannellature; se successivamente in sistemi di punti e, c, f; e, l, f; e, h, f ecc. si descriveranno gli archi $a\,c$, $l\,l'$, $h\,h'$ ecc. questi rappresenteranno, come dicemmo più addietro, nelle curve $a\,c$, $a'\,c'$, l'ortografia della colonna, e con molta e più che sufficiente approssimazione le ortografie $l\,l'$, $h\,h'$ ecc. delle cannellature. Si è detto con approssimazione, perchè a tutto rigore le curve $l\,l'$, $h\,h'$ ecc. (essendo le $a\,c$, $a'\,c'$ circolari) dovrebbero essere archi ellettici.

Del rastrematojo (*).

È universale opinione degli architetti di stile castigato, che tra i molti metodi praticati onde rastremare le colonne, il più elegante e naturale sia quello di decrescerle progressivamente dal basso all' alto, in modo che l' ortografia delle stesse presenti da ciascun lato una curva continua. La delineazione però di questa curva ortografica riescendo assai malagevole, perchè non altrimenti praticata che a mano, i disegnatori perciò ricorrono al partito di formare i lati delle colonne con due rette unentesi ad angoli ottusissimi al terzo inferiore delle stesse, oppure fanno procedere la rastremazione in linea retta, con discapito della bellezza e della grata apparenza del fusto.

Lo strumento qui sotto descritto, provvede al bisogno che apparisce dal detto, porge cioè il mezzo di descrivere con somma prestezza e precisione l'anzidetta elegante curva di rastremazione, e può perciò porsi nel novero degli strumenti necessarj ai diligenti disegnatori d' architettura.

Il rastrematojo consiste in una squadretta di legno $IEHC$ (Fig. LXIX), avente un'appendice HC, a cui è attaccata una lamina di ottone AA', di larghezza uniforme, e di grossezza degradata da A verso A', ed in una vite BA' che può girarsi in una madrevite immobile situata nel legno, e

(*) Premiato insieme al triregolo nel 1822.

che si collega coll'estremo superiore della lamina nel modo indicato in *d*; ritenuto che *c d* rappresenti la parte superiore della lamina *A A'*, veduta di fronte. Dal detto si vede, che aggirando la vite, l'estremità *A'* della lamina dovrà avvicinarsi ad *I*, e quindi dovrà essa lamina piegarsi e disporsi in una curva, che è appunto quella di cui vien proposto l'uso per la rastremazione. È da notarsi la seguente avvertenza per chi vorrà costruire lo strumento in discorso. Ultimato che sia il medesimo, si ritiri il punto *A'* sino ad *I*, e si tracci su di una carta la curva data dalla piegatura della lamina, indi si rivolga lo strumento in modo che il punto *A* sia verso *A'*, e viceversa, e che la costa della lamina prima aderente alla carta venga superiore all'altra costa, indi si esamini se la piegatura coincide perfettamente colla curva segnata sulla carta. In caso che ciò non avvenga, converrà assottigliare la lamina ne' luoghi atti a produrre la detta coincidenza.

Maniera di usare il rastrematojo.

Segnati i due diametri estremi della colonna, i quali sieno *e l*, *m n*, si adatti il filo *I H* della squadra all'asse *x y* della colonna stessa, e l'altro filo *H C* al diametro inferiore *m n*. Sottoposta quindi una riga *O N* al rastrematojo, si faccia scorrere sulla medesima fino a che il filo *A A'* della lamina di ottone tocchi il punto *n*, ed aggirando poi la vite *B A'*, si tiri la parte superiore della men-

zionata lamina fino che il filo anzidetto passi pel punto l. Disposte le cose in questo modo, si tracci la curva ln seguendo la curvatura della lamina, e questa sarà la curva di rastremazione. Per segnare l'altra curva em, e quelle spettanti alle altre colonne che si trovassero nel disegno, è chiaro non essere più necessaria la riga ON, bastando a far coincidere il lembo AA' della lamina, coi punti che indicano i diametri superiore ed inferiore della colonna.

Compasso d' ovale.

Questo strumento semplicissimo, somministrando il mezzo di descrivere con moto continuo una curva ovale di bella proporzione, può tornare in varie circostanze utile agli architetti ed ornatisti, i quali con processo lungo ed inesatto, sogliono talvolta formare la curva stessa con una serie di archi circolari, aventi raggi di varie dimensioni e centri diversi.

Il compasso d'ovale (Fig. LXX) è composto di due regoli ineguali AB, AF, di cui due estremi sono soprapposti e collegati insieme con uno spillo che lascia libera la rotazione, come è mostrato in A: al primo regolo AB va unita una fascia f scorrevole lungo il regolo medesimo, e che può ruotare sopra una piastrella cc, da cui sporgono inferiormente due piccole punte per essere attaccata alla carta. L' altro regolo poi AF è abbracciato pure da una fascia scorrevole g, alla quale è fissata lateralmente una punta segnante.

Maniera d' usare il compasso d' ovale.

Sia *L H* la lunghezza che debbe avere il diametro dell' ovale che si vuol descrivere. Sul prolungamento di questa, dalla parte in cui debbe cadere la maggior larghezza dell' ovale stessa, si soprapponga la piastrella *c c*, in modo che il perno su cui può ruotare la fascia *f* coincida precisamente col prolungamento medesimo. Indi si pongano i due perni *A*, *f*, tra di loro distanti quanto la metà di *L H*, ed i due punti *A*, *g*, distanti quanto *A f* più *f L*. Ciò fatto si prolunghi l' asse *L H* anche dalla parte opposta *H*, e su questo prolungamento s'infigga uno spillo *I*, più o meno lontano da *H*, a seconda che si vorrà l' ovale più o meno diminuita verso *H*. Finalmente messo il lembo del regolo *F A*, trovantesi dalla parte della punta descrittrice, a contatto collo spillo *I*, si faccia fare un' intiera rivoluzione sul punto *f* al regolo *A B*, sempre mantenendo il contatto suddetto, e verrà descritta dalla punta *g* la curva desiderata.

Notisi che per avere la curva ovale, il punto *I* non dovrà mai essere distante da *f* meno dell'intervallo *A g* più *A f*; nel caso che la distanza su mentovata uguagliasse la dimensione degli intervalli ora accennati, la curva sarebbe angolare dalla parte di *H*, e diverrebbe nodata in *I*, nel caso che la distanza in quistione fosse minore degli intervalli suddetti.

APPENDICE II.

METODO SEMPLICE DI DESCRIVERE PER PUNTI E PER APPROSSIMAZIONE, MEDIANTE ARCHI DI CERCHIO, LE CURVE CONICHE E LA FIGURA OVALE.

Del modo di descrivere per punti le curve coniche.

Le curve coniche possono, come è notissimo, descriversi con moto meccanicamente continuo, d'un punto diretto da fili e regoli convenientemente disposti sopra di un piano.

Se i due estremi di un filo si fissino a due punti G', G''' (Fig. LXXI) del piano, distanti fra loro meno della lunghezza del filo, poi facciasi girare sul piano uno stile che s' appoggi al filo mantenendolo sempre egualmente teso, lo stile descriverà un' ellisse $ADBC$, il di cui asse primario AB, scorgerassi uguale alla lunghezza del filo $G'SG'''$, colla sola osservazione, che collocato il filo lungo la retta che passa pei due punti fissi G', G''', trovandosi lo stile all' uno o all' altro dei due vertici A, B della curva, il filo vedesi raddoppiato sia dall' una sia dall' altra parte, per la porzione intercetta fra il vertice coperto dallo stile ed il punto che gli è più vicino. Nella descrizione della ellisse non occorre l'uso de' regoli, bastando lo stile ad ottenere la tensione del filo, in modo che possa questo considerarsi diviso sempre in due rette $G'S$, SG''' differentemente situate sul

piano la di cui somma è costante in ogni posizione.

I punti fissi G', G''' impiegati in questa meccanica descrizione, e quelli che sono necessarj per le seguenti analoghe descrizioni, li chiameremo col nome conosciuto di *fochi* delle curve coniche.

Se l' estremo d' un filo si fissi ad un foco G' (Fig. LXXII), e nell'altro foco G'' s' imperni un regolo $G'''X$, il di cui centro di rotazione sia esattamente nel foco G''' e nel prolungamento di uno de' suoi lembi, poi collocato il regolo in modo che questo lembo sia soprapposto alla linea $G'''L'$ che passa pei due fochi, e lungo il medesimo lembo tendasi il filo per mezzo di uno stile posto fra i detti fochi, ma più vicino al primo G' del filo di quello sia al secondo G''' del perno, se girando il regolo lo stile vi si mantenga sempre aderente, svilupperassi continuamente il filo dal regolo, e, conservata l' uniformità della tensione, lo stile girando sul piano descriverà una iperbole, la quale rivolgerà la sua concavità verso il primo foco G'.

Nella prima posizione del regolo, considerata la porzione di filo tra il primo foco G' e lo stile S, indi la parte nuda del regolo $G'''S$, è facile di convincersi, che questa stessa differenza manterrassi sempre costante tra il filo staccato e la parta nuda del regolo, in qualunque posizione che lo stile prenda successivamente; e ciò per la sola osservazione, che a ciascun aumento del filo che pel movimento dello stile si va sviluppando, corri-

sponde sempre un eguale accrescimento della parte nuda del regolo da cui il filo si è sviluppato, quindi due rette $G''' S$, $G' S$ condotte dai due fochi ad un qualunque punto comune S sull'iperbole, avranno sempre fra loro una costante ed uguale differenza.

Se nella prima posizione del regolo, quella cioè in cui il suo lembo è soprapposto alla linea $G''' L'$ che passa pei due fochi, lo stile che tende il filo, arriva e si colloca nel mezzo T della differenza fra i due fochi, la menzionata differenza riesce nulla, quindi le rette tirate da' fochi costituiranno sempre i due lati uguali ed egualmenmente crescenti di triangoli isosceli successivi, di cui lo stile ne descriverà successivamente l'altezza. L'iperbole adunque in questa condizione perde la sua curvatura, e si risolve in una linea retta $V Z$ perpendicolare a quella che congiunge i fochi.

Se poi lo stile tendendo il filo oltrepassa la metà della mentovata distanza e va più vicino al secondo foco G''', allora la differenza non si può più prendere dal filo al regolo, ma devesi invece ritrovare per la sottrazione della lunghezza del regolo da quella del filo, onde si comprende che l'iperbole descritta dallo stile in questa condizione, rivolgerà la sua concavità verso il secondo foco G'''.

Quando in amendue le condizioni prese l'una dopo l'altra, la distanza dello stile dal secondo foco G''' uguagli quello che lo stile medesimo aveva dal primo foco G', siccome due rette condotte dai due

fochi ad un qualunque punto sia dell'una sia dell'altra iperbole, mantengono sempre una differenza eguale, così è chiaro che le due iperboli sono eguali ed egualmente disposte, ciascuna rispetto a quel foco che comprendono nella loro concavità. Esse si chiamano *iperboli opposte*, e rappresentandosi algebraicamente le loro caratteristiche proprietà sempre col mezzo di una sola equazione, vengono per conseguenza dai geometri considerate come un' unica e medesima curva.

La differenza uguale e costante della lunghezza del filo sviluppato a quella della parte nuda del regolo, compone precisamente la distanza fra i due vertici B, A delle opposte iperboli, la quale dicesi *asse primario* della curva.

Se s' immagini che il lembo del regolo continui oltre il suo perno, cosicchè lo stile tendendo il doppio filo, questo oltrepassasse il secondo foco G''', è chiaro che sotto questa condizione il filo applicato al lembo non si svilupperà mai dal regolo, anzi nel giro di questo vi si metterà a contatto sempre maggior quantità di filo, talchè nella posizione diametralmente opposta alla prima, lo stile cadrà oltre il primo foco G', mantenendosi, durante il giro, immobile in quel punto di filo che copre il secondo foco, onde si riconosce inutile il soccorso del regolo, e ci troviamo ricondotti alla descrizione della ellisse superiormente esposta.

Se per simile considerazione, le descrizioni delle due curve si confondono sotto una legge sola, è poi chiarissimo che dalla medesima legge

dipende quella della parabola (Fig. LXXIII), dove fissa in un foco G' l' estremità del filo, questo vedesi applicato ad un regolo XX' e teso da uno stile che mai abbandona il regolo, mentre questo s' allontana successivamente dalla retta di prima posizione, mantenendosi sempre parallelo alla medesima: la conservazione di questo parallelismo, dipende dalla reale esistenza di un solo foco nella parabola, e la sua descrizione conciliasi con quella della ellisse e della iperbole, accordando una lunghezza indefinita all' asse della curva, ed immaginando che il secondo foco sia spinto oltre ogni limite, sia dall' una sia dall' altra parte dell' asse medesimo.

Affinchè il regolo mantengasi nel suo movimento sempre parallelo all' asse, conviene comporlo di due rami XX', Xm a squadra, uno de' quali si fa scorrere lungo un altro regolo mh fisso perpendicolarmente all' asse AL', che può dirsi *regolo direttore* del moto. Questo regolo direttore può essere collocato in qualunque posto, ma se si farà passare per quel punto I dell' asse fuori della parabola, che sia tanto distante dal vertice A della curva quanto questo lo è dal foco G', ne nascerà la bella proprietà, e facilissima a vedersi, cioè, che la lunghezza del filo sviluppato $G'S$, dal foco allo stile, sarà sempre uguale alla parte nuda del regolo XS a squadra, ossia alla perpendicolare al regolo direttore, la linea del di cui lembo chiamasi *direttrice*.

Da questa legge di descrizione continua delle

curve coniche, si ricava il metodo inferiormente esposto, che vale a descrivere per punti tutte e tre le curve, metodo che appoggiato ad un solo e medesimo principio, si modifica per applicarsi alla proprietà di relazione fra le rette condotte dai fochi ad un punto della curva, la quale nella ellisse costituisce sempre una somma costante, nell'iperbole una costante differenza, e questa somma o differenza saremo costretti ad immaginarla infinita nella parabola, onde riescirebbe impossibile la pratica dello stesso metodo, senza il soccorso della linea direttrice stabilita come al § superiore, la quale riduce quella proprietà all'eguaglianza fra loro, della retta condotta dal foco ad un punto della parabola e della perpendicolare di questo alla direttrice.

Per descrivere la ellisse, dato l'asse primario AB (Fig. LXXI) e la posizione dei fochi G', G''', da uno d'essi G''', prendasi sulla linea AB prolungata la parte IG''' eguale all'asse primario, e fatto centro in G''', descrivansi quanti circoli si vogliono tutti concentrici, $GG'G''$, $FF'F''$, $HH'H''$, $LL'L''$ fino al punto di mezzo A della distanza $G'I$, indi coi raggi IL', IH', IF', IG' presi uno dopo l'altro e col centro G', si descrivano degli archetti circolari, i quali intersechino successivamente i circoli corrispondenti nei punti L, L''; H, H''; F, F''; G, G''; è chiaro che tutti questi punti apparterranno all'ellisse che ci proponemmo di descrivere, poichè tutte le somme delle rette che si supponessero tracciate dai punti LG''', LG'; HG''',

$H\,G'$; $F\,G'''$, $F\,G'$; $G\,G'''$, $G\,G'$ prese a due a due, e così quelle dalla parte di BDA, sono costanti ed eguali ad $I\,G'''$, ossia all'asse primario $A\,B$. È poi evidente, che se si trasportasse il punto I dalla parte di B, eseguendo le medesime operazioni ma con ordine inverso intorno ai fochi G', G'', si otterrebbero ancora tutti i punti della medesima ellisse.

Analoga alla suddetta è la descrizione della iperbole di cui si abbiano i fochi G''', G' (Figura LXXII). Prendasi sulla $G'''\,G'$ la parte $G'''\,I$ eguale all'asse primario $A\,B$, e fatto centro in G''' descrivansi quanti circoli si vogliono tutti concentrici, $G\,G'\,G''$, $F\,F'\,F''$, $H\,H'\,H''$, $L\,L'\,L''$, principiando dal punto di mezzo A della distanza $I\,G'$, indi coi raggi $I\,G'$, $I\,F'$, $I\,H'$, $I\,L'$, presi l'uno dopo l'altro e col centro G', si descriveranno degli archetti circolari i quali intersechino successivamente i circoli corrispondenti nei punti G, G''; F, F'' ecc. è chiaro che tutti questi punti apparterranno alla proposta iperbole, poichè tutte le differenze di $G\,G'$ da $G\,G'''$, di $G'\,F$ da $F\,G'''$, di $G'\,H$ da $H\,G'''$, di $G'\,L$ da $L\,G'''$ e così quelle dalla parte di $A\,G''\,L''$, sono costanti ed uguali a $G'''I$, ossia all'asse primario $A\,B$. È poi chiaro che collocato il punto I verso B ad uguale distanza di B da G''', ed eseguite le medesime operazioni, ma con ordine inverso intorno ai fochi G''', G', otterransi i punti tutti della iperbole opposta $l\,B\,l'$.

Per la descrizione della parabola è facile immaginarsi, che siccome gli archi circolari descritti

per l'ellisse e per l' iperbole intorno al foco G''', rivolgono i primi la loro convessità ed i secondi la loro concavità verso il rispettivo vertice A della curva, così questi medesimi archi per la parabola, si cambieranno in altrettante rette perpendicolari all'asse. Stabilito pertanto il foco G' (Figura LXXIII), ed il punto I per cui s'immagina passare la direttrice hm, il vertice della parabola cadrà nel punto A alla metà di IG'. Adunque da questo punto A procedendo lungo l'asse, si condurranno quante si vogliono rette perpendicolari all'asse medesimo, $GG'G''$, $FF'F''$, $HH'H''$, $LL'L''$, indi coi raggi IG', IF', IH', IL' presi uno dopo l'altro e col centro G', si descriveranno degli archetti circolari, i quali intersechino successivamente le rette corrispondenti nei punti G, G''; F, F''; H, H''; L, L'', e per tale modo sarà descritta la proposta parabola, la quale passerà pei punti G, F, H, L e per gli altri G'', F'', H', L'', giacchè le rette GG', FF' ecc. saranno sempre eguali rispettivamente alle Gg, Ff ecc. che possono immaginarsi condotte dai punti della curva perpendicolarmente alla direttrice.

Del modo di descrivere per punti la curva ovale (Fig. LXXIV).

La teoria dell' operazione di cui abbiamo a discorrere, viene dedotta da quella del compasso d' ovale, già accennato nell' Append. I. Essendo ag la maggior dimensione dell' ovale, ossia l' asse di essa, si prolunga indefinitamente da ambe le estremità, e dalla parte della maggior larghezza,

si descriva il cerchio *A B C* ecc. avente il centro sul corrispondente prolungamento ed il diametro eguale ad *a g*, e più o meno distante dal punto *a*, secondo vuolsi più o meno allargata da questa parte la figura. Sulla stessa *a g* prolungata dalla parte di *g*, si prenda pure il punto *o* più o meno distante da *g*, secondo vuolsi più o meno diminuita la curva dell'ovale, e quindi si segnino le *B o*, *C o*, *M o*, *N o*, le quali seghino in due parti la circonferenza del circolo, e le *D o*, *L o* tangenti alla stessa nei punti *D*, *L*. Prendasi la dimensione *A a*, e questa si trasporta in *B b*, *C c*, *D d*, *E e* ecc. ed uniti i punti *a*, *b*, *c*, *d* ecc. con una curva, sarà dessa l'ovale cercata; la quale, come è evidente, sarà racchiusa dalle *D o*, *L o* che ne costituiranno due tangenti aventi i punti di contatto in *d*, *l*.

Del modo di comporre la forma dell'ellisse per approssimazione con archi di circolo (Fig. LXXI).

Acciò l'approssimazione sia vicina alla forma dell'ellisse a segno da non iscorgersi dall'occhio sensibile variazione, s'incomincerà dal segnare a mano il quadrante *A G F C*, colla regola sopraccennata per l'ellisse, oppure con qualunque altra che si avesse più alla mano, e siccome quanto più la curva è vicina al vertice, sempre più difficile riesce il combinarla col circolo, così s'incominci prima a cercare sull'asse primario un punto (sempre più distante che il fuoco dal corrispondente vertice), il quale preso come centro, sia il più proprio ad adattare l'arco relativo alla curva sopraccennata. Sia *O* il centro di cui

si parla e Q il punto ove la curva circolare comincia a distaccarsi dalla ellittica; per Q ed O si segni una retta indefinita dalla parte di O, e su di questa si cerchi un altro punto come centro, col quale descritto un arco circolare, questo possa combinarsi colla curva ellittica che da Q progredisce verso F. Sia P questo punto ed R quello ove l'arco testè detto si discosta dalla ellisse. Per R e P si segni la RP, e questa si prolunghi ad incontrare in N l'asse minore pure prolungato. Questo punto N servirà di centro per l'arco RR', il quale sarà diviso per metà dal punto C. Si segni la $R'N$ e su questa si prenda $P'N$ eguale a PN, e preso pure il punto O' distante quanto O dal centro H dell'ellisse, si segni la indefinita $P'Q'$ passante per O', e quindi col centro in P' l'arco $R'Q'$, e col centro in O' l'arco $Q''Q'''$ diviso per metà dal vertice B. I punti P', N, P trasportati dalla parte opposta dell'asse primario, servono per descrivere il resto della curva, come è agevole a comprendersi dalla stessa figura.

Del modo di tracciare la forma della parabola ed iperbole con archi di cerchio (Figura LXXIII).

Per gli archi $Q'Q$, QR, RS, serve la descrizione per gli analoghi QQ', QR della ellisse; riguardo al resto della curva, siccome questa va avvicinandosi alla retta, e quindi i centri corrispondenti si allontanano in modo di rendere incomoda l'operazione fatta col compasso ordinario, così, trovati tre punti, si potrebbe far uso del compasso

d'archi, in quel modo che nella descrizione dello stesso dicemmo (Vedi App. I).

Metodo per segnare con archi di cerchio la curva ovale (Fig. LXXV).

Tracciata a mano la metà della curva LGX col metodo insegnato, s'incominci dal trovare sull'asse il punto M, il quale, preso come centro, sia il più proprio ad uniformare l'arco circolare AB colla curva più diminuita dell'ovale, segnata per A ed M una retta indefinita dalla parte di M, si trovi su di essa il punto D che è il centro dell'arco CA, sulla CD prolungata si avrà F centro dell'arco EC, e sulla EFH il punto H centro dell'arco EG. Ritornando ora verso l'asse si trovi sulla GH il centro L dell'arco IG, e finalmente la sezione di IL con l'asse stesso, darà in N il centro per l'arco ILI'. Compita in questa guisa la metà dell'ovale, si trasportino i centri dalla parte opposta per avere l'altra metà.

AGGIUNTA

Essendo tra le curve di cui si parlò in questa App. II, la ellisse quella che più delle altre accade di rappresentare agli artisti, e specialmente a quelli che attendono alle prospettive, come vedemmo nelle teorie delle curve, non sarà inutile l'accennare quivi alcune definizioni e proprietà caratteristiche spettanti a questa figura, come pure il modo di descriverla dati i diametri conjugati, come il più delle volte occorre nella pro-

spettiva dei circoli e delle ellissi, e come si trovi il punto di contatto di una data tangente, le quali cose serviranno di schiarimento per quelli che non ne sono cogniti, tanto per la intelligenza delle teorie testè accennate, quanto per la esecuzione grafica di esse.

Definizioni e proprietà risguardanti la ellisse (Fig. LXXVI).

Qualunque retta *A B, D C* che passi pel centro *G* e tocchi la circonferenza, dicesi *diametro* della ellisse. Di questi, *M L* che divide in due parti eguali e similmente poste la maggior lunghezza della ellisse, dicesi, come vedemmo, *asse maggiore* o *primario*, e *N O* che si eleva nel mezzo e perpendicolare ad *M L*, *asse minore* o *secondario*, essendo questa *N O* realmente la minore linea che si possa tirare nella ellisse passante pel di lei centro. Dalla descrizione già data per questa figura si vede che i fochi *V*, *V'* debbono essere distanti dagli estremi *N*, *O* dell'asse minore, quanto la metà *G M* dell'asse maggiore. Gli estremi *L*, *M* dell'asse maggiore diconsi i *vertici* della ellisse.

Tutti i diametri della ellisse dividono in due parti eguali la stessa, e gli angoli di questi alla circonferenza sono, quegli degli assi retti, e quelli degli altri diametri eguali negli alterni-interni, cioè il diametro *A B* darà l'angolo *B A N* eguale all'angolo *A B O*, e l'angolo *B A L* eguale all'angolo *A B X'*.

La somma di due rette *V C*, *C V'* che dai

fochi si uniscono alla circonferenza, è costantemente eguale all'asse maggiore; ciò si rileva dalla descrizione già data per la ellisse, e gli angoli $V' C L$, $V C P$ sono eguali; quindi una linea $T C$ che divida per metà l'angolo $V C V'$, è perpendicolare alla periferia della ellisse.

Ogni linea passante pel punto ove unisconsi le due rette condotte dai fochi alla circonferenza, perpendicolarmente a quella che divide per metà l'angolo delle due rette ora accennate, per esempio la $S R$ che s'intende perpendicolare alla $T C$, tocca la circonferenza nel solo punto C, che dicesi perciò *di contatto*; la $S R$ chiamasi *tangente* alla ellisse, e spettante a quel diametro $D C$ che ha un suo estremo in C. Si osservi che ad ogni diametro corrispondono due tangenti, e queste tra loro parallele, e che gli angoli delle tangenti col rispettivo diametro, sono eguali ai corrispondenti angoli dello stesso diametro alla circonferenza, così l'angolo $D C R$ sarà eguale all' angolo $D C L$, e l'angolo $D C S$ eguale all'angolo $D C P$.

Un diametro $B A$ che è parallelo alla tangente $R S$ spettante ad un altro diametro $D C$, dicesi *conjugato* a questo, egli è poi evidente che le tangenti spettanti al diametro $A B$ debbono essere parallele al diametro $D C$, quindi questi diametri sono rispettivamente conjugati. Sotto queste condizioni i due assi saranno tra loro conjugati, e siccome questi formano angoli retti tra loro, quindi le tangenti rispettive saranno pure perpendicolari ad essi.

Diconsi *ordinate* ad un dato diametro quelle rette, che, non passando pel centro, sono parallele alle tangenti spettanti allo stesso diametro. Così la retta PL che s'intende parallela alla RS, sarà un'ordinata del diametro DC. Si rifletta che ogni ordinata viene divisa in due parti eguali dal diametro corrispondente, quindi QP sarà eguale a LQ.

Le ordinate degli assi sono perpendicolari rispettivamente a questi, e di più quella che passa per un foco, che dicesi *parametro* della ellisse, è una terza proporzionale dopo la lunghezza dell' asse maggiore e quella dell' asse minore.

Dati i diametri conjugati di una ellisse, descriverne la circonferenza (Fig. LXXVI).

Rappresentino AB, CD i due diametri conjugati: da un punto estremo di uno di essi, per esempio A, si ecciti la AH perpendicolare all'altro diametro CD, e su la stessa AH, prolungata se fia d' uopo, si prenda l' intervallo FA eguale alla metà dello stesso CD, che sarà GD, e quindi per F e pel centro G della ellisse, si segni la indefinita FI. Prendansi sul lembo di una carta in linea retta i tre punti A, H, F, e facendo scorrere H sulla CD ed F sulla FI, si segnino le diverse situazioni del punto A, le quali unite con una curva daranno la ellisse che si cerca.

Dati i diametri conjugati di una ellisse, trovarne gli assi (Fig. LXXVI).

Si segni come nel § antecedente la FA, sulla stessa prolungata dalla parte di A si prenda l' in-

tervallo $A F'$ eguale ed $A F$, e si tracci con F' e G la $F' I'$. Segnisi una $L M$ dividente in due parti eguali l'angolo $F' G F$, ed un'altra $N O$ dividente pure egualmente l'angolo $F' G I$, e queste formeranno i due assi indeterminati. Prendasi su di una lista di carta, come disopra dicemmo, i punti A, H, F, e tenendo H su $C D$ ed F su $F I$, si faccia in modo che il punto A cada sulla $L M$; in questa situazione esso punto A darà L, uno degli estremi del diametro maggiore, e replicato $L G$ in $G M$, sarà esso diametro determinato in $L M$. Tenendo sempre i punti H, F sulle corrispondenti linee, si soprapponga pure A ad $N O$, ed avendo in questa guisa determinato un estremo dell' asse minore, si avrà l' intiero asse operando come si è detto del maggiore.

Data la tangente ad un' ellisse, trovarne con precisione il punto di contatto (Fig. LXXVI).

Sia $R S$ la tangente data, si segni la $L P$ parallela ad $R S$, la quale seghi la circonferenza in due punti qualunque L, P, dividasi essa $L P$ nel mezzo in Q, e per questo punto ed il centro G producendo una retta a segare la circonferenza, tale punto di sezione C sarà quello che cercasi. Se non fosse segnato il centro G, si condurrà un'altra linea $L' P'$ parallela pure ad $R S$ e divisa nel mezzo da un punto Q', e pei punti Q', Q si segnerà la $Q' Q$ toccante la circonferenza in C.

APPENDICE III.

METODO PER DESCRIVERE L'ICNOGRAFIA, L'ORTOGRAFIA ED IL PROFILO DI UNA VOLTA ORNATA DI CASSETTONI (Fig. LXXVII).

Occorre spesso agli architetti di aver a rappresentare l'ortografia, il profilo ed anche l'icnografia di una volta ornata di cassettoni. Molte sono le regole che soglionsi a tal uopo adoperare; sembrandomi quella che sono per esporre bastevolmente semplice, e ad un tempo generale per tutte le volte la cui superficie interna sia continua, credo far cosa grata agli architetti l'accennarla.

Avverto che preventivamente debbonsi determinare, il numero dei cassettoni all'ingiro, la larghezza delle fasce che gli separano, l'altezza e l'aggetto delle sagome che gli circondano; cose tutte dipendenti dal genio dell'architetto e dalla qualità dell'edifizio di cui la volta è parte. Questi dati non meno che quell'altro che i lati dei cassettoni debbano riescire tangenti ad un circolo avente il centro nel centro del rosone che sogliono contenere, sono necessarj per le successive operazioni.

Ciò posto sia $SMAA'$ la metà dell'ortografia, e la sottoposta figura l'icnografia di una quarta parte della volta in cui debbonsi distribuire i cassettoni. Dividasi l'arco SMA in un numero di

parti tanto più grande, quanta maggiore esattezza desiderasi nel disegno, per esempio *AE, EI, IM, MO, OQ, QS*; dai punti di divisione conducansi le orizzontali *HE, LI, NM, PO, RQ*, le quali rappresentano le ortografie di altrettanti archi condotti pei medesimi punti di divisione, e che tagliano la volta in zone orizzontali. Descrivansi coi raggi *HE, LI, NM, PO, RQ* anche le icnografie dei suddetti archi, ed a segar queste conducansi le icnografie dei lembi delle fasce. Le ortografie di questi punti d'intersecazione che ora ogni disegnatore sa facilmente determinare, sono altrettanti punti, col soccorso dei quali si possono descrivere le ortografie dei lembi delle fasce suddette. Per simil modo prolungando le rette *HE, LI, NM, PO, RQ*, fino ad incontrare l'arco *X'ZV'* che rappresenta lo sfondo dei cassettoni, e con queste rette così prolungate descrivendo nell'icnografia altrettanti archi di cerchio, che nella figura si sono marcati interrotti, avransi nell'ortografia dei punti d'intersecazione di essi archi colle icnografie dei lembi delle sagome, una guida per descrivere le ortografie dei lembi delle sagome stesse.

Determinate così le ortografie ed icnografie dei lembi delle fasce e delle sagome giacenti in piani verticali, restano da determinarsi le ortografie ed icnografie dei lembi di quelle fasce e sagome che giacciono in piani orizzontali. A questo fine dispongansi successivamente su di una medesima retta *s'a'* le *a'e', e'i, im', m'o', o'q', q's'*, eguali

rispettivamente alla AE, EI, IM, ecc. di modo che l'intiera $s'a'$, rappresenti l'arco AMS rettificato. Dai punti a', e', i', m', o', q', innalzinsi le perpendicolari alla medesima $a's'$, poi stabilita nella icnografia, la ab eguale alla metà della fascia, e la bc eguale alla larghezza della sagoma, e condotte le bs, cs, si prendino le $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$ eguali rispettivamente alle ab, bc, cd; le $e'f'$, $f'g'$, $g'h'$, eguali alle ef, fg, gh, e così di seguito, quindi a mano, coll'uso del compasso d'archi o del rastrematojo, si segnino le curve $d'n's'$, $c'g's'$, $b'f's$. Ciò eseguito descrivasi la semiperiferia che ha il suo centro sulla retta $a's'$, che ha uno de' suoi termini in a' e che riesce tangente alla curva $b'f's'$, poi l'altra semiperiferia che ha il medesimo centro e che riesce tangente alla curva $c'g's'$, quindi un' altra semiperiferia avente il centro sulla medesima retta $s'a'$, uno de' suoi termini comuni colla semiperiferia ultimamente descritta, e tale da risultare tangente alla terza curva $d'n's'$; e così di seguito le altre semiperiferie, come viene indicato dalla figura, sino ad esaurire tutto lo spazio assegnato ai cassettoni. Si trasporti ora l'intervallo $a't'$ sull' arco AMS in AT, e l'orizzontale condotta dal punto T formerà l'ortografia del lembo superiore della prima fascia; così trasportata sul medesimo arco AMS la $t'v'$ in TV, si determini il punto V' mediante la VV' diretta ad A'; l'orizzontale condotta per V' costituirà l'ortografia del lembo superiore della sagoma, e la TV' il reale anda-

mento della sagoma stessa. Similmente trasportato l'intervallo $e'u'$ in EU, e determinato il punto X colla UX tendente ad A', si avrà nella orizzontale condotta per X, l'ortografia del lembo inferiore della seconda sagoma, così procedendo, la $u'x'$ darà l'ortografia del lembo superiore della seconda sagoma, la $x'y'$ il lembo superiore della seconda fascia, e così sino alla fine.

Compita in tal modo l'ortografia della volta ornata di cassettoni ed il profilo $X'OMZ$ ecc. si potrà immediatamente compiere anche l'icnografia. Se le fasce e le sagome fossero divise in più membri, si procederebbe per ciascun membro come si è fatto per l'intiera fascia e per l'intiera sagoma. Finalmente è parimenti facile il dedurre da quanto si è sopra esposto, come agirebbesi nel caso che i cassettoni fossero ottagoni o d'altra forma.

Metodo con cui segnare lo scomparto in una volta.

Dal metodo precedentemente esposto per descrivere l'ortografia di una volta ornata di cassettoni, si può agevolmente dedurne, quella con cui segnare all'atto pratico lo scomparto de' medesimi cassettoni su di una volta, nella quale occorressero. Ecco quale modificazione abbiasi ad introdurre nel metodo precedente. Le ab, bc, cd, che trasportavansi sullo sviluppo in $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, si segnino ora sulla volta all'origine dei cas-

settoni, come viene indicato dalle $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$. Fissato quindi il capo di un filo in S vertice della volta, ed un punto dello stesso filo in A', in modo che la porzione di filo $S\,A'$ sia ben tesa, si faccia scorrere un altro filo sempre aderente al primo, e che sia mantenuto verticale in tutta la sua lunghezza da un peso. La traccia $S\,A'$ che lascerà sulla volta il termine superiore del filo verticale, tien luogo della $s'\,a'$ sullo sviluppo: così fissando il primo filo ai punti S, B', e facendo scorrere il secondo nel modo già accennato, avrassi la traccia $S\,B'$ che tien luogo della $s'\,b'$, e così delle altre tracce $S\,C'$, $S\,D'$, che tengono luogo delle $s'c'$, $s'\,d'$. Le operazioni successive da eseguirsi sulla superficie della volta, sono affatto simili a quelle che insegnaronsi doversi eseguire sullo sviluppo, quindi se ne ommette la ripetizione. Vuolsi avvertire però, che i punti corrispondenti agli V', X ecc. e che nell'operazione antecedente si sono dedotti dagli altri U, V ecc. mediante le rette concorrenti in A', si dedurranno all'atto pratico di cui si tratta dai punti analoghi agli stessi U, V ecc., e si prolungheranno nello sfondo reale de' cassettoni mediante una squadra, in modo agevole a comprendersi.

Avvertirò per ultimo essere metodo assai spedito e sicuro pel tracciamento delle linee sulla superficie della volta, quello di servirsi delle ombre projettate da fili opportunamente collocati, i quali impediscano i raggi di un lume posto in un piano che passi per la linea da descri-

versi sulla volta e pel filo che produce l' ombra. Per esempio, vuolsi trovare la traccia della linea projettata in *S S' S''*. Si trovi un punto *S'*, prossimamente alla metà dei due estremi *S*, *S''*, col metodo del filo insegnato antecedentemente, quindi si ponga il lume in quel luogo, ove l' ombra del filo che servì a trovare il punto projettato in *S'*, passi per questo; evidentemente l'ombra testè nominata sarà projettata in *S S' S''*, e perciò potrà descriversi con essa la linea di cui cercasi la traccia. Egualmente pei circoli posti su di un piano orizzontale, si attacchi, per esempio, il filo al punto indicato da *I* ed all'altro analogo esistente sulla estremità opposta dello stesso diametro; si segni il punto la di cui projezione è *L*, distante quanto *I* dal vertice della volta, e situato il lume in un luogo ove l' ombra del filo passi per *L*, si potrà descrivere la linea projettata per metà in *L I*. Ottenuta con questa la metà del circolo, si trasporterà il lume dalla parte opposta per trovare in modo analogo l' altra metà. Per i circoli orizzontali è però generalmente più comodo, l' attaccare un filo stabilmente al vertice della volta con un capo, e dall'altra parte congiungendovi una punta descrittrice, farla scorrere all' ingiro segnando sulla superficie della volta stessa.

NOTE

(*a*) È da notarsi che la parola piramide non è presa nello stretto senso geometrico, giacchè a norma dei varj oggetti osservati, potrà ciò che abbiam denominato piramide, divenire una piramide propriamente detta, cioè un solido a facce triangolari aventi ciascuna un angolo in un punto comune, ovvero una superficie conica, cioè quella generata da una retta che, fissa con un suo estremo in un punto, si muova lambendo una curva qualunque, ovvero una superficie piramidale mista, cioè composta di porzioni triangolari di superficie conica e di triangoli piani.

(*b*) Queste determinazioni meccaniche della prospettiva, si eseguiscono col soccorso di macchinette espressamente costrutte. Tali sono il parallelogrammo del P. Scheiner, il velo o vetro e lo sportello descritti dal Paradossi, la camera oscura, la camera lucida, la reticola, ecc.

È generale opinione tra gli artisti, che queste macchinette possano essere di danno ai giovani studenti del disegno, qualora ne facessero uso nei loro studj, perchè indicandosi con esse il contorno dell' obbiettivo materialmente sulla superficie, levano all' occhio il modo di avvezzarsi a copiare senza del loro sussidio, e quindi non è facile che esso possa rettificarsi, e che la mano si avvezzi ad ubbidirlo; e quest' opinione radicata in gioventù, fa sì che provetti sdegnano gli stessi mezzi quantunque potessero esser loro di utile, perchè non fu un elemento de' loro studj, e perchè imbarazzati si trovano ad adoperare una macchina della quale non fecero mai uso.

Quest' opinione però può esser vera, quando parlasi di quelle tra queste macchine, che rendono l' operatore cieco strumento dell'operazione, come lo sono dal più al meno quelle sopraccennate, se si eccettua la reticola: questa a mio credere hanno torto gli artisti a tenerla in poco conto, perchè l' uso suo lasciando all' operatore un certo campo di riflettere, nello stesso tempo che gli indica con sufficiente precisione il luogo dove debb' esser tracciato il contorno dell' oggetto che si copia, può esser utile non solo ai professori per risparmio di tempo e per l' esattezza maggiore dell' opera, ma anche

ai giovani che tendono ad avvezzar l'occhio a veder bene e la mano a segnare conformemente. Si noti quivi, che la reticola può riputarsi un'applicazione più esatta del modo di ritrarre ad occhio dal rilievo; infatti, quando gli artisti fanno pendere il mattitatojo verticalmente o lo dispongono in senso orizzontale, traguardando con un occhio chiuso un lembo di esso, per paragonare le situazioni che i varj punti della cosa veduta hanno fra loro nelle due posizioni accennate, essi non fanno che cercare appunto per approssimazione, ciò che la reticola dà con più sicurezza. Darebbe nel falso, chi asserisse che l'occhio può accertarsi di per sè, di non aver preso abbaglio nel riferire su di una superficie il contorno di un obbiettivo. Prova ne sia le discordanze che accadono nelle copie di un oggetto fatte da più disegnatori, benchè prese da un unico punto di vista; anzi anche nel caso che un solo di essi ne facesse due copie, sieno pur desse prese dal medesimo punto visuale, mai si ottiene un eguale risultamento. Ciò posto io sono d'avviso, che se il giovane studente si mettesse a copiare, per esempio, una statua, prima ad occhio e poscia col sussidio della reticola dal medesimo punto di vista, e quindi facendo il confronto dei due disegni, correggesse il primo coll'esempio del secondo, a me pare, dico, che l'occhio in questa guisa verrebbe a rettificarsi con mezzi più sicuri, e sull'andamento delle leggi esatte. Sembrami perciò, che dando in questa nota un'idea della costruzione di tale macchinetta e del modo di usarne, sia per essere di utile a quelli che non conoscessero tali cose, ed ai giovani iniziati nelle arti del disegno.

La reticola componesi di un telajo quadrato o rettangolare, della dimensione poco più di un piede di Parigi, ed armato di fili disposti parallelamente a' suoi lati, esistenti nel medesimo piano, e formanti varj quadratelli uguali larghi un pollice circa per lato. Avrassi pure l'avvertenza che questi fili sieno composti di due strati l'uno nero e l'altro bianco, acciò o cadano sul chiaro o sullo scuro, abbiano ad essere sempre visibili. Il telajo sopradetto sarà attaccato perpendicolarmente al lato di una tavoletta piana che potrà essere dell'egual dimensione. Un pezzo composto di tre o quattro regoletti snodati a guisa di braccio da tasca, sarà attaccato per una estremità al lato della tavoletta, opposto a quello a cui evvi attaccata la rete, e dall'altra estremità saravvi un anello, nel quale si possa introdurre un'asticella terminata da una estremità in una piastrella circolare con un piccolo foro nel mezzo, ed in modo che questo foro si possa presentare avanti alla rete. L'asticella potrà introdursi più o meno nell'anello sopradetto, e fermarsi mediante una vite di pres-

sione. Egli è poi facile l'accorgersi, che il foro testè detto è quello pel quale si debbe riguardare l'oggetto, cioè è la rappresentazione del punto di vista, e che tutto il meccanismo annesso è combinato per potere alzare od abbassare detto punto, ed allontanarlo od avvicinarlo alla rete. Tutta la macchina potrà essere sostenuta da tre piedi attaccati sotto la tavoletta, oppure essa si potrà appoggiare a qualunque altro sostegno, a seconda crederà più opportuno chi ha da farne uso. Veniamo al modo di servirsene.

Si presenti in primo luogo la reticola avanti l'oggetto da copiarsi, in maniera che il piano della rete sia verticale, quello della tavoletta orizzontale, e l'oggetto sia tutto compreso nei quadratelli della rete, ciò che potrassi sempre ottenere, alzando più o meno il punto di vista, o più o meno avvicinandolo alla rete medesima. Credo inutile l'avvertire che questo punto dovrà collocarsi nel luogo più opportuno per la veduta dell'obbiettivo. Ciò eseguito, la prima cosa da farsi è quella di numerare i quadratelli che comprendono esso obbiettivo, tanto nel senso verticale che orizzontale, e di segnare un egual numero di quadrati sul foglio sul quale si vuole eseguire il disegno, e questi di una dimensione più o meno grande, a seconda di quella che si vuol dare al disegno stesso. Dopo questo, sempre guardando dal foro l'oggetto, si osserverà ove i contorni di esso cadono rispetto ai quadratelli della rete, e facendo lo stesso di quelli segnati sulla carta, verrà a disegnarsi la sua precisa immagine su di questa.

Ciò viene detto in generale per tutti gli oggetti, nel caso per altro che questi fossero composti di linee parallele, come per esempio un'architettura, l'operazione da eseguirsi subito dopo quella dei quadratelli accennata, sarà di prendere la distanza del punto di vista dal piano della tavoletta o dal suo prolungamento, e, trasportata sulla rete sempre appoggiandosi allo stesso piano, vedere in quale situazione cada rispetto ad una serie orizzontale di quadratelli. La stessa situazione presa pure nell'analoga serie dei quadratelli del disegno, si segnerà una linea parallela ai lati orizzontali dei medesimi, la quale sarà la orizzontale della prospettiva. Tracciata una tal linea, si cercherà l'immagine di quelle tra le obbiettive orizzontali, che per la sua situazione rispetto ai quadratelli della rete, sia più facile il segnarla con precisione sul disegno, e questa si prolungherà fino ad incontrare la orizzontale testè detta, per avere il punto di concorso spettante alle parallele all'obbiettiva accennata. Il resto è per sè chiaro. Avvertiremo che per tale operazione è sempre necessario aver una cognizione sufficiente delle regole prospettiche, e che

quelle insegnate col metodo esposto in questo trattato, ove l'immaginazione ha gran parte nella costruzione delle stesse, sono le più acconce a facilitar l'uso della reticola ed a tracciar con precisione il contorno di un oggetto regolare.

(*c*) Per vantaggio di quelli che non avessero una precisa nozione del senso in cui la parola *projezione* è usata nei trattati di geometria descrittiva, che è quello che noi riteniamo per tale parola nel presente trattato, premetteremo le dilucidazioni seguenti.

La parola projezione è impiegata con vario senso in diverse scienze, in geometria però tutti i suoi significati sono contenuti nella definizione che siegue.

Projezione di un corpo sopra una superficie, è l'intersezione di questa con un'altra, generata da una retta assoggettata alla condizione di trasferirsi con moto continuo da un punto del corpo a tutti gli altri del medesimo, mantenendo in questo suo viaggio una inclinazione regolata da una legge costante. Sia per esempio il corpo un circolo, esista ad una certa distanza di questo un piano indefinito, e ad un punto collocato fuori dei detti oggetti sia come impernato l'estremo di una retta, la quale si muova lambendo tutto il contorno del circolo e segando il piano su nominato; egli è chiaro che la retta descriverà una superficie conica, e che tale superficie conica segnerà nella sezione di essa col piano ora detto una curva, la quale sarà la projezione del contorno del circolo. Questa dicesi projezione conica. Se in luogo della retta mobile si supponga una fiaccola nel punto in cui si immaginò impernata la retta, ed il circolo si supporrà tra questa ed il piano, il contorno dell'ombra che il circolo indurrà sopra quest'ultima, sarà una projezione identica a quella testè citata.

Se la retta mobile nel lambire il circolo si manterrà sempre parallela alle precedenti sue posizioni, verrà a generarsi una superficie cilindrica, la di cui intersezione col piano, darà una projezione di un altro genere, che si dice projezione cilindrica.

Finalmente se il piano su cui debbe esistere una projezione cilindrica del circolo, sia perpendicolare alla retta mobile, si avrà ciò che si chiama projezione retta, od anche semplicemente projezione, che è quella di cui intendiamo parlare. Le ortografie ed icnografie di un progetto architettonico, sono projezioni di questo genere. Esposto alla luce solare il circolo sottoponendovi il piano, si avrà nell'ombra su di questo, una projezione cilindrica obbliqua se desso sarà obbliquo alla direzione dei raggi, ed una projezione retta se il piano sarà perpendicolare alla direzione suddetta.

Da ciò si vede che per projezione retta, oppure semplicemente per projezione di un corpo, s' intende la figura determinata su di un piano, da una retta che mantenendosi sempre perpendicolare a questo, si trasferisca successivamente a tutti i punti di esso corpo.

(*d*) S' intende per operazione grafica, quella con cui si giunge a determinare la posizione di tutte le rette o curve che abbisognano ad un disegno qualunque.

(*e*) A scanso d' ogni equivoco avvertiremo, che per anteriore al punto di vista intendiamo tutto ciò che è collocato nello spazio che da un piano passante pel punto di vista parallelamente alla parete, si estende verso questa ed oltre la medesima, e per posteriore al punto suddetto, gli oggetti collocati nello spazio che dall' immaginato piano si estende in senso opposto alla parete.

(*f*) Superficie di rivoluzione o rotazione, si nominano quelle generate dal ruotare di un poligono qualunque intorno ad uno de' suoi lati, ritenuto immobile, ovvero dalla rotazione intorno ad una retta, di una curva qualunque fissata in una posizione invariabile rispetto alla retta medesima. Così il ruotare di un triangolo intorno ad uno de' suoi lati produce un cono, il ruotare di un rettangolo un cilindro, il ruotare di un circolo intorno ad un suo diámetro una sfera, il ruotare di una ellisse attorno ad uno de' suoi assi un ellissoide ecc.

(*g*) Ella è cosa per sè stessa evidente, che dovendo l' ortografia di un corpo esser determinata da linee, quella di un piano indefinito non potrà ottenersi, che allorquando esso piano sarà perpendicolare a quello ortografico, vale a dire, se non quando l' ortografia di lui diverrà una retta; nel qual caso quest' ortografia farà colla corrispondente fondamentale, un angolo eguale a quello esistente tra i due piani obbiettivo e geometrico. Nel nostro caso essendo *I Y* la fondamentale ortografica ed *H G I* un angolo eguale a quello che i due piani geometrico ed obbiettivo fanno tra loro, sarà l' ortografia *B A* parallela alla *H G*. Per la particolare disposizione della figura poi, ove tutti i punti icnografici sono disposti sotto i corrispondenti dell' ortografia in senso perpendicolare alla *I Y*, sarà questa pure perpendicolare alla comune sezione dei due piani obbiettivo e geometrico, e la *A B* incontrerà essa *I Y*, nel punto ove la comune sezione ora detta segherà la stessa *Y I*.

(*h*) Si è presa in questa figura e nella maggior parte delle successive, una porzione aliquota della linea di distanza, per isfuggire

una soverchia grandezza nelle tavole, e per dar luogo ad alcune regole abbreviatrici che si esporranno nella Sez. III.

(i) Egli è necessario che io quivi rettifichi un errore isfuggitomi in altra mia opera, intitolata *Geometria descritiva ad uso degli artisti, ecc.* nella quale nella parte che risguarda la prospettiva, in un caso analogo (pag. 74), ritenni la corda $A B$ come rappretante la maggior linea prospettica del circolo, quando non è che la linea maggiore della icnografia di esso. L' erroneo ragionamento portò che io diedi per asse dell'ellisse la prospettiva di essa AB, e ne emerse la conseguenza che erronee risultarono le operazioni che ad un tale ragionamento appoggiansi. Prego perciò i miei lettori ad emendare una tale inavvertenza, colle riflessioni più mature che in quest' opera si contengono.

(j) Le parti di cui componesi un obbiettivo od una prospettiva di lui, possono presentarsi all' occhio dello spettatore in due distinti modi, cioè *di facciata* o *di fronte*, ed *in iscorcio*; ma dipendendo questi modi di vedere da cause diverse nell' obbiettivo e nella prospettiva, e tali che ciò che trovasi di facciata in uno può divenire in iscorcio nell'altra, e viceversa, ho creduto necessario uno schiarimento in proposito.

Diconsi adunque vedute in iscorcio, quelle parti di un obbiettivo che si presentano di sfuggita, e sotto un angolo minore del massimo sotto cui può presentarsi la loro reale dimensione, e che appartiene alla veduta di facciata; che è quanto dire, sarà in iscorcio quella parte di un obbiettivo che è base di una piramide visuale obbliqua, e sarà di facciata quella che è base di una piramide visuale retta. Ciò sia detto però, rigorosamente parlando, imperocchè in generale non viene compresa in tale definizione la situazione verticale, nella quale benchè la piramide visuale sia obbliqua, si reputa però veduto di facciata, quell'oggetto che nel senso della larghezza mantiene la condizione che dicemmo.

Dalle forme poi che prende un obbiettivo tradotto in prospettiva, analoghe a quelle ora dette, prende pure in questa le denominazioni di prospettiva di facciata od in iscorcio. Risulterà quindi di facciata la prospettiva di un piano fatta su di una parete parallela ad esso, ed in iscorcio se la prospettiva sarà eseguita su di una parete inclinata al piano stesso. Dicesi poi più o meno scorciata, a seconda che maggiore o minore è la inclinazione suddetta. Ne emerge quindi, che le rette di una prospettiva in iscorcio rappresentanti linee parallele, avranno il loro punto di concorso, e non ne avranno quelle di una prospettiva di facciata o di fronte.

Per convincersi poi che le parti in iscorcio di un obbiettivo possono risultare di fronte, e viceversa, immaginiamo un cubo del quale vedansi due facce in iscorcio, ed immaginiamo fatta la prospettiva di esso su di una parete parallela ad una delle facce suddette; egli è evidente che la prospettiva della faccia obbiettiva parallela alla parete, risulterà eguale o simile alla stessa, come appunto accaderebbe se dessa fosse veduta di facciata, e però di facciata dirassi la prospettiva corrispondente. La prospettiva dell'altra faccia avendo poi due lati concorrenti, rimarrà in iscorcio, come in iscorcio lo è la corrispondente obbiettiva. Egualmente se collocherassi il punto di vista in modo che la faccia obbiettiva risulti di fronte, e quindi segnerassi la prospettiva di essa su di una parete non parallela alla medesima, i lati concorrenti e l'alterazione della forma della faccia stessa, presenteranno una prospettiva in iscorcio.

Egli è però necessario l'avvertire, che un tale scambiamento di nomi non deriva da una reale diversità di apparenze tra la prospettiva e l'obbiettivo che rappresenta; imperocchè trovandosi lo spettatore collocato nel giusto punto di vista, non cambiasi per nulla la forma nella piramide visuale, e quindi la sensazione rimane identica. Ciò che si disse adunque rapporto al diverso aspetto di un obbiettivo paragonato colla di lui prospettiva, non debbe intendersi se non relativamente a quando quest'ultima è veduta fuori del punto su indicato, la qual maniera di vedere le prospettive essendo in ultima analisi la più comune, egli è perciò naturale che le definizioni che dicemmo, sieno applicate più che all'unica e giusta, alla più ordinaria collocazione dello spettatore.

(*k*) Chiamasi prospettiva *col punto in mezzo* quella fatta con un lato di facciata, colla direttrice nel mezzo di esso, e coi lati di fianco in uno scorcio simmetrico: *ad angolo retto* dicesi quella prospettiva avente un lato di facciata, ma la direttrice non collocata nel mezzo come si disse, e le parti laterali inegualmente scorciate; e finalmente dicesi *fuori dell'angolo retto,* od anche semplicemente *fuori d'angolo*, quella prospettiva i di cui lati sono tutti dal più al meno in iscorcio.

(*l*) I primitivi teatri d'Italia, sembra che avessero i canali nei quali scorrono le quinte non paralleli al telone, per cui in tale situazione restavano pure le quinte stesse. Ciò si rileva dall'opera di prospettiva del P. Pozzi (Fig. LXXII), laddove avvertendo le difficoltà che si affacciano al pittore teatrale nel disegnarle in tale situazione, dice che si potrebbero evitare, *mettendo i canali dritti* (cioè paralleli all'apertura del proscenio) *come si costuma in al-*

cuni luoghi, specialmente in Germania. Ad ogni modo egli nemmeno dubita che una tale disposizione inclinata nelle quinte, possa apportare dei vantaggi alla illusione scenica, e riguardo alla delineazione delle stesse, non insegna il modo di operare quando la scena riesce veduta fuori dell' angolo retto, e nemmeno esatto è il metodo che egli descrive per la loro delineazione, quando il punto di vista è simmetricamente disposto nel mezzo.

(*m*) Una tale circostanza, darà forse occasione ad alcuni pittori di credere, non essere questa regola combinabile col ristretto spazio di tempo che generalmente accordansi ai pittori da teatro per l'esecuzione delle scene; se riflettesi però che il bisogno della prospettiva in tale caso, ristringesi alle sole linee principali dell' icnografia, cioè a quelle linee che ne costituiscono l' insieme, comprenderassi che l' esigenza non è poi di tale peso che non possa combinarsi anche colla massima celerità. Riguardo poi alla pianta del palco che si reputa necessaria pel tracciamento della icnografia suddetta, un' esatta incisione può levare l' incomodo di farla ogni qualvolta abbisogna.

Se qualche ostacolo può frapporsi adunque in tale circostanza, io più volontieri inclino a credere doversi attribuire all' uso, giacchè un' abitudine contratta di mala voglia si abbandona, e ben di sovente una complicata regola a cui si è abituati, anteponesi ad un' altra più semplice di cui l' uso non ci rese ancor famigliari. Del resto sembrandomi non esservi strada più plausibile per l' ottenimento di una perfetta prospettiva in questo caso, lascio che ciascuno ne deduca la propria conseguenza.

FINE

INDICE

SEZIONE II.

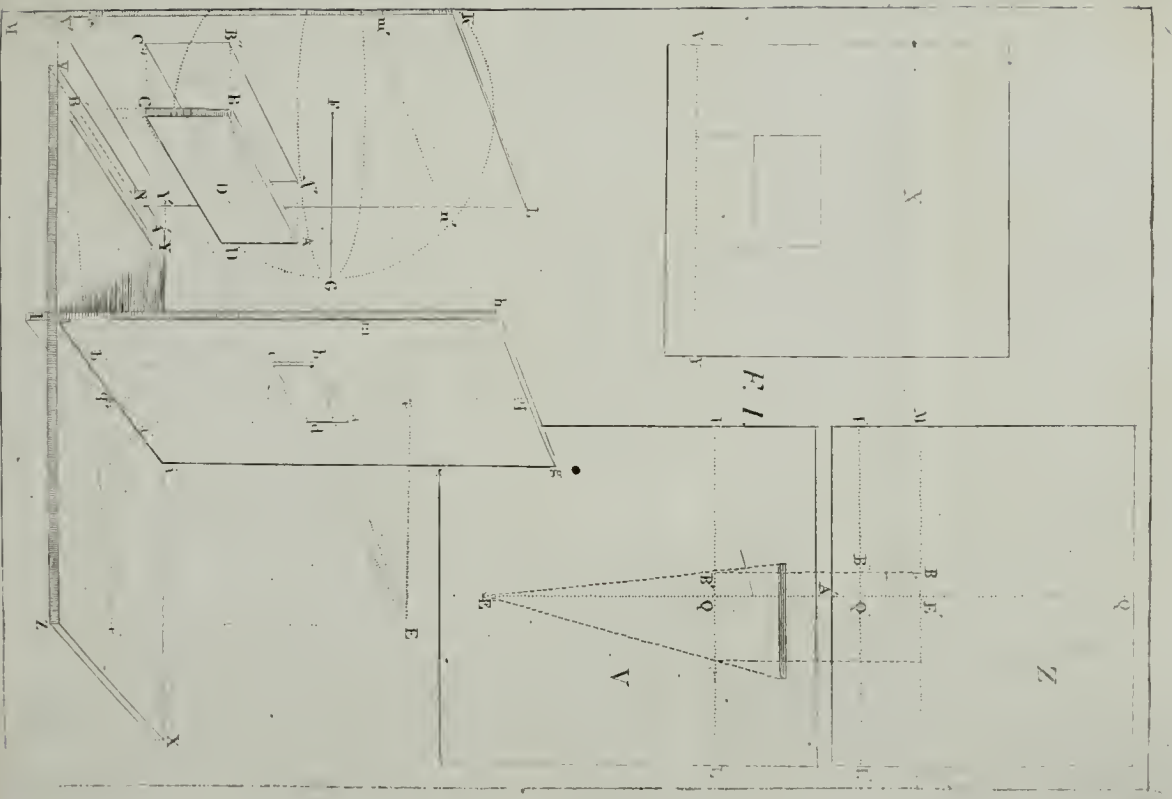
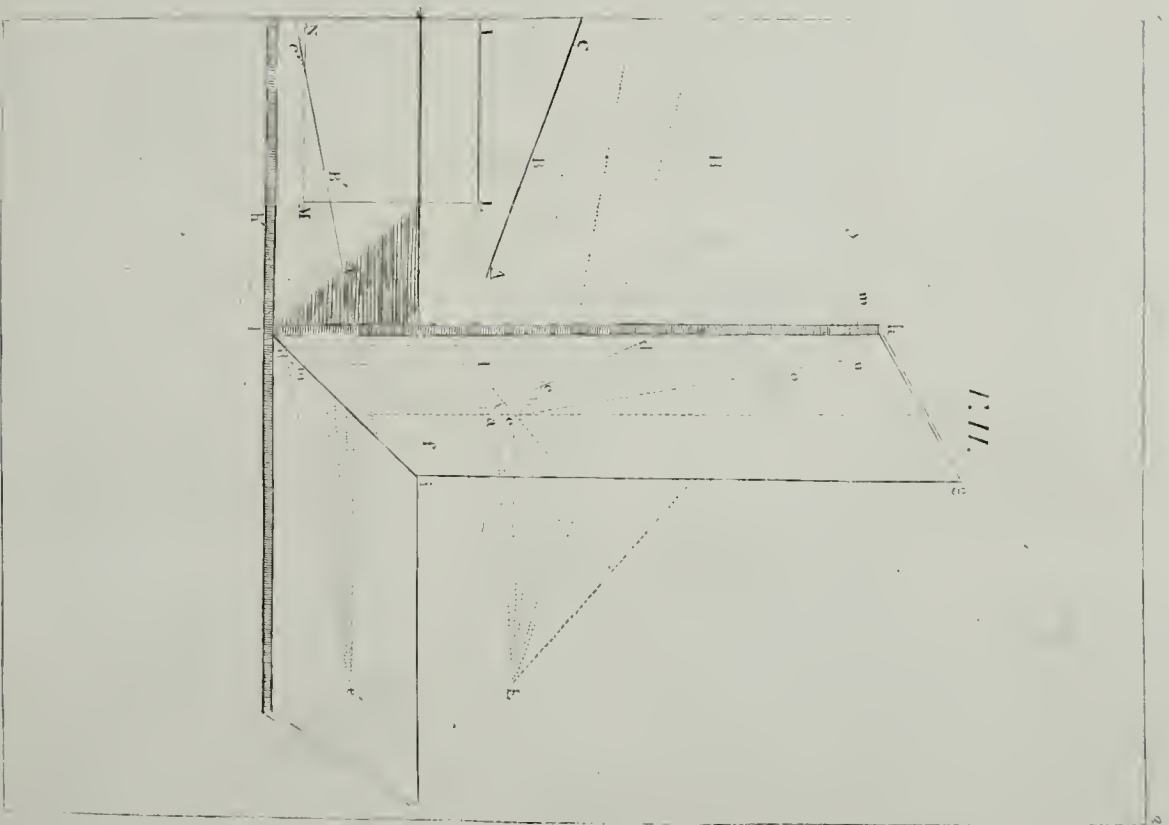
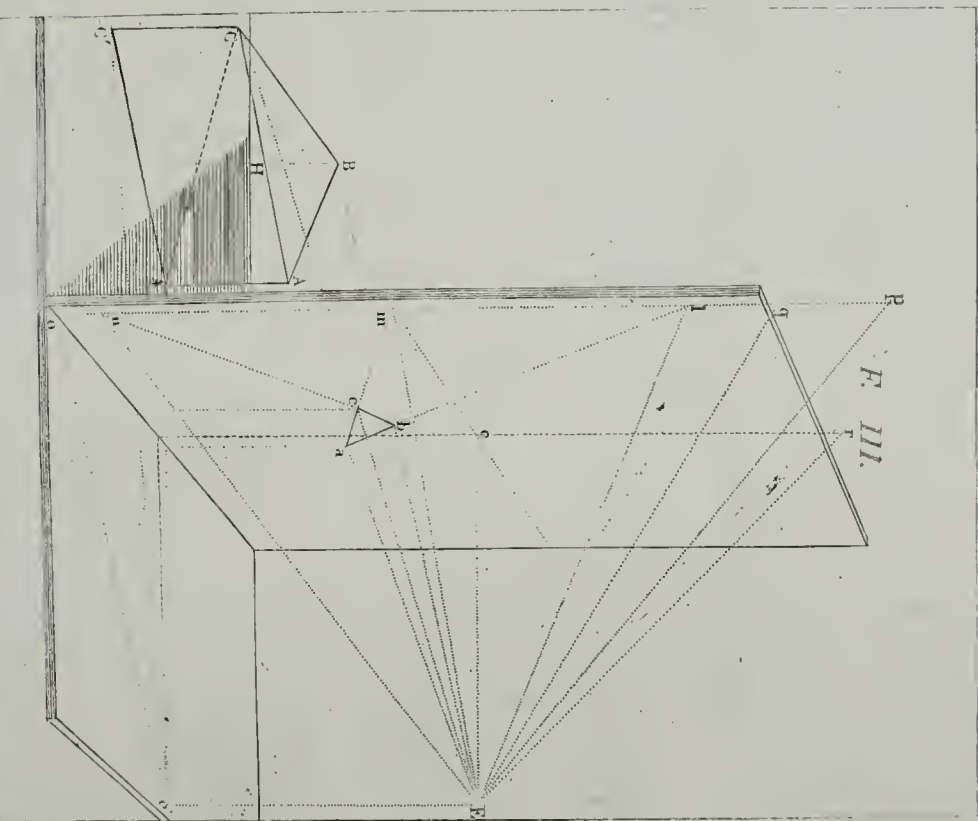
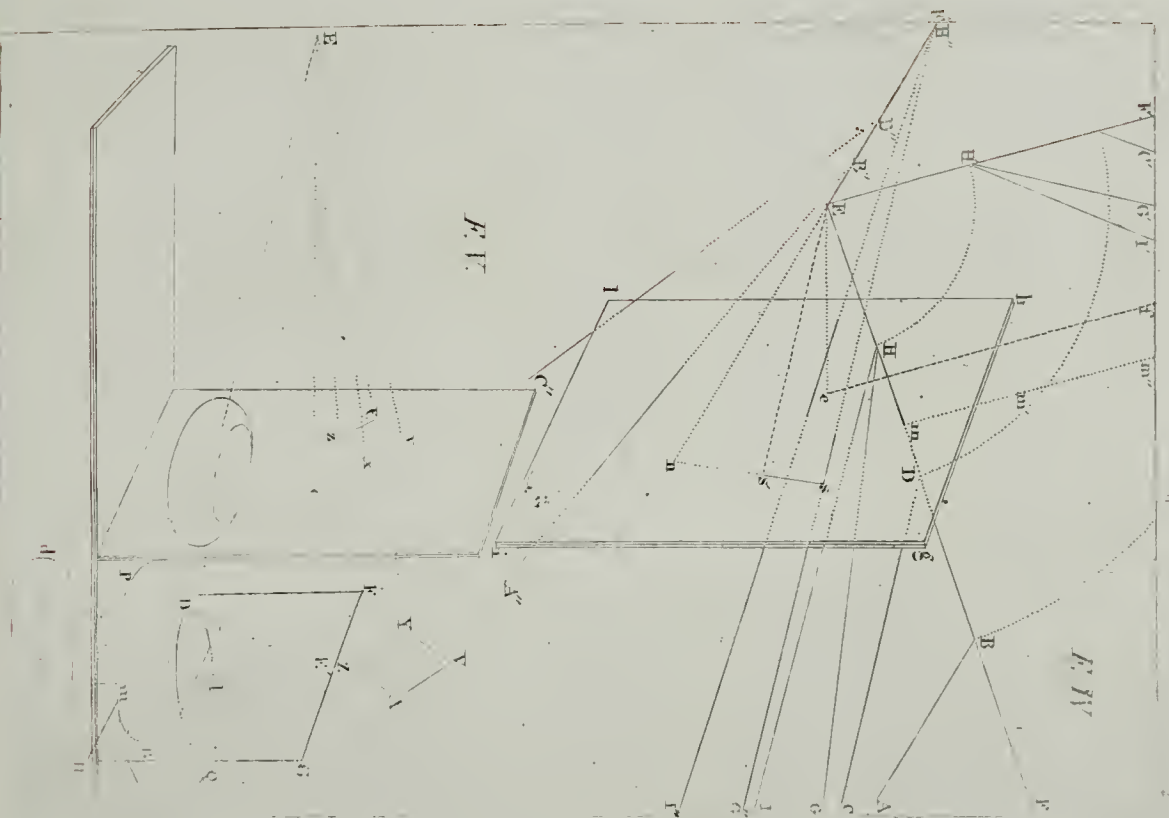
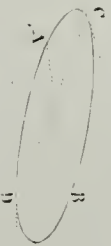
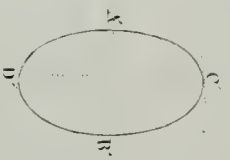
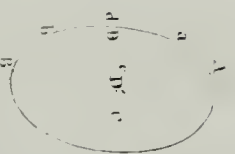
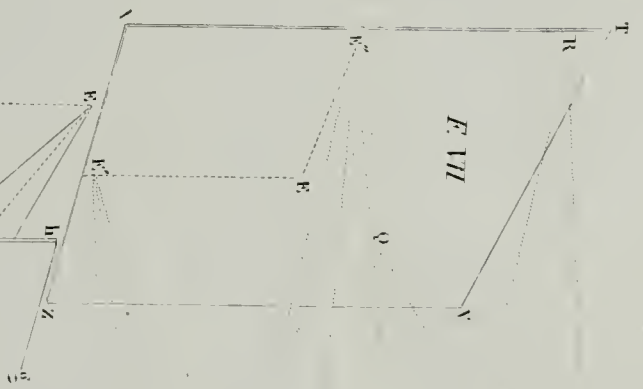
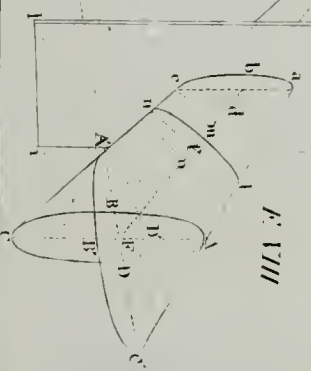
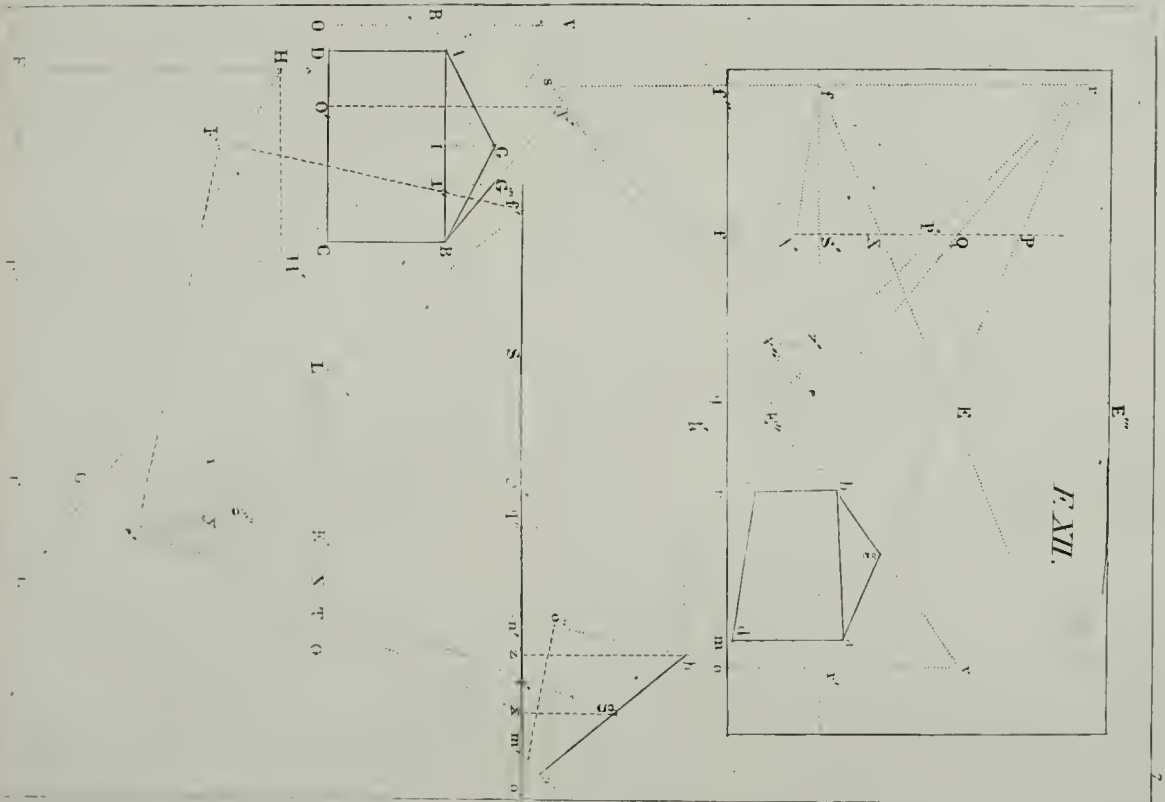
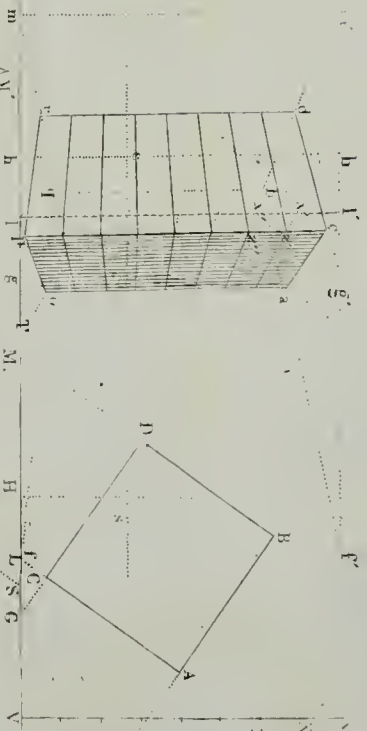
SEZIONE III.

ERRORI			CORREZIONI
pag.	*lin.*		
» 6	» 11	prospetticamante	prospetticamente
» 13	» 27	rappresenterà $e\ q$	rappresenterà $e\ q'$
» 67	» 7	Sia $D\ C$	Sia $D\ C''$
» 71	» 24	$l\ d$.	$l\ b$.
» 73	» 21	icnografica	icnografia.
» 74	» 27	da a' la $o''\ a'$	da o' la $o''\ o'$
» 76	» 28	pei punti q, l	pei punti q, l'
» 89	» 19	che è d,	che è d',
» 92	» 3	distante	distanti
» *ivi*	» 17	normnali	normali
» 96	» 22	a $b'\ q$	a $b\ q$
» 111	» 22	dell'enunciato,	dall'enunciato
» 121	» 6	$f'f''$	ff''
» 123	» 19	da c''	da e''
» 125	» 19	C il di lui	C il di lei
» *ivi*	» 21	ed $e\ x$	e $c\ x$
» 151	» 19	un parete	una parete
» 173	» 18	scoprirsi	coprirsi
» 208	» 4	dalle	delle
» 213	» 28	si avrà $q'\ S : q\ E' ::$	si avrà $q'\ S : q\ f' ::$
» 218	» 5	(Fig. LXIV),	(Fig. LIV),
» 220	» 14	(Fig. XXVIII),	(Fig. XLVIII),
» 234	» 30	i due punti f', f	i due punti f, f'
» 236	» 31	da questa s	da questa si
» 242	» 12	266	267
» 243	» 11	267	268
» 250	» 23	ad $x\ t$	ad $x'\ t$

F. III.
p
r
q
l
s
E
b
m
c
a
B
A
H
C
C'
n
o

F. IV.
F. V.

F. VI.
F. VII
F. VIII

F. IX
F. X
F. XI

F. XII.

F. XIII.
F. XIV.

F. XV.
F. XVI
F. XVII

F. XVIII
F. XIX

F. XX.
f
q
h
g
r
V
d
C
x
A
P
C
S
Q
R
D
B

F. XXI

F. XXII
F. XXIII

F. XXV
F. XXIV
F. XXVI
F. XXVII

F. XXVIII
F. XXIX.

F. XXX.

F. XXXI.

F. XXXII
F. XXXIII.
F. XXXIV.

F. XXXV
F. XXXVI
F. XXXVII

F. XXXVIII.
F. XXXIX.
F. XL.
F. XLI.
F. XLII.

F. XLIV
F. XLV

F. XLVI.

F. XLVII.

24
F.XLIV

F. L.
F. LI.
F. LII.

36
F. LIII.
X
a
b'
c'
i
h
d'
g
b
c''
c
e
d
d''
f
O
R
S
T
M
P
Q
N
H
F
D
C
B
A
M
I
F. LIV.
E
H'
G'
H
G
L
F

F. LV.
X
Z
V
O
C
A
S
T
N
I
E
M
H
P
G
L
F
Q
B
F. LVI.
A
C
B
D
G
F

F. LVII.
Z
Z
A B C D E F G H I L M N O P
a
b
c
d
e
f
g
h
i
l
m
n
q
r
s
y
x

F. LVIII.
F. LIX.
A
B
Q
R
S

F. LX.
F. LXI.

F. LXII

F. LXIII
F. LXVII
F. LXIV
F. LXV
F. LXVI

33

F. LXXI.
F. LXXV.
F. LXXII
F. LXXVI
F. LXXIII.

F. LXXVII
Alzata
Sviluppo
Pianta